Parties Convexes & Fonctions Convexes d'une ou plusieurs Variables.

Ex. 1 : Fonctions convexes dans $\mathbb{R}^N$. Avec la norme $\|x\| = \sum_{j=1}^{N} |x_j|$ dans $\mathbb{R}^N$, on considère $f : B_2 \to \mathbb{R}$ convexe.

1) *a)* Montrer que f est bornée sur la "sphère" $\{x, \ \|x\| = 1\}$ en écrivant x comme barycentre de $\pm e_1, \ldots, \pm e_N$, avec $(e_1, ..., e_N)$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$.

b) Pour $x \in \bar{B}_1$, $x \neq 0$, on note $u = \frac{x}{\|x\|}$, et $\varphi : [-1, 1] \ni t \to f(tu)$. Vérifier que φ est convexe. En encadrant $\dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$ pour $t \in [-1, 1]$, $t \neq 0$, en déduire que f est continue en 0.

c) Justifier que f est bornée sur $\{x, \ \|x\| \leq \frac{3}{2}\}$, et montrer que f est Lispchitzienne sur $\bar{B}_1$ (on utilisera des accroissements dans les directions parallèles aux axes de coordonnées).

2) Généraliser pour montrer que si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert convexe et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est convexe, alors f est continue sur Ω, et même localement Lipschitzienne dans Ω.

Ex. 2 : Convexité : caractérisations et extrema. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction sur un *ouvert* convexe $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

1) On suppose f différentiable sur Ω.

a) Montrer que f est convexe si et seulement si pour tous x, $y \in \Omega$, $\qquad f(y) - f(x) \geq df_x(y - x)$.

$\Rightarrow$ poser $g(t) = f\big((1-t)x + ty\big)$, $t \in [0, 1]$, montrer que g est convexe, et majorer $\frac{g(t)-g(0)}{t}$.

$\Leftarrow$ pour x, $y \in \Omega$ et $t \in [0, 1]$, faire une combinaison convexe des inégalités obtenues avec (x, z) et (y, z).

b) En déduire que si $a \in \Omega$, alors a est un point critique de f si et seulement si a est un minimum de f, si et seulement si a est un minimum local de f. Est-il nécessairement un minimun strict ?

c) Montrer que si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est strictement convexe et coercive (*i.e.* $f(x) \to +\infty$ si $\|x\| \to +\infty$), alors f a un unique minimum. *Exemple :* A, B, C sont dans le plan, et $f(M) = \|M - A\| + \|M - B\| + \|M - C\|$).

2) On suppose f deux fois différentiable sur Ω (on peut envisager de classe $\mathcal{C}^2$ pour simplifier). Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $x \in \Omega$, la forme quadratique $h \mapsto d^2 f_x(h, h)$ est positive.

$\Rightarrow$ appliquer une formule de Taylor à $f\big(x + th\big)$, et utiliser **1)** *a)*.

$\Leftarrow$ appliquer une formule de Taylor à $g(t) = f\big(x + th\big)$, et utiliser **1)** *a)*.

3) Voir Gourdon, Pb. 3 p. 339 pour un problème de minimisation d'une fonction convexe coercive.

Ex. 3 : Convexité et valeurs propres. Pour $A \in \mathcal{S}_n$, on désigne par $\lambda_1(A) \leq ... \leq \lambda_n(A)$ ses valeurs propres.

1) Justifier les caractérisations (de Courant-Fisher), où $\|x\| = \|x\|_2$:

$$\lambda_1(A) = \min_{\|x\|=1} \ (Ax, x) \qquad \text{et} \qquad \lambda_n(A) = \max_{\|x\|=1} \ (Ax, x).$$

2) En déduire que $\lambda_1 : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}$ (resp. $\lambda_n : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}$) est une fonction concave (resp. convexe).

Ex. 4 : Convexité et matrices.

1) Rappeler pourquoi $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^{++}$ (resp. $\mathcal{H}_n^+$ et $\mathcal{H}_n^{++}$) sont des ensembles convexes.

2) Montrer que l'application $\varphi : A \mapsto \big(\det(A)\big)^{-\frac{1}{2}}$ de l'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}$ des matrices $n \times n$ symétriques définies positives dans $\mathbb{R}_+^*$ est strictement convexe (on pourra songer à considérer le logarithme).

Plusieurs indications possibles :

$\star$ Commencer par montrer l'inégalité $\ln \circ \varphi\big(tA_1 + (1-t)A_0\big) < t \ln \circ \varphi(A_1) + (1-t) \ln \circ \varphi(A_0)$ lorsque $A_0 = I_n$. On se ramènera à ce cas grâce à : si $A_0 \in \mathcal{S}_n^{++}$, il existe $B_0 \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que $A_0 = B_0^{-2}$.

$\star$ Utiliser un résultat de réduction simultanée : si A et B sont des matrices $n \times n$ symétriques avec A définie positive, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que

$$A = {}^tPP \qquad \text{et} \qquad B = {}^tPDP.$$

3) A l'aide des mêmes indications, démontrer le résultat suivant :

Si A et B sont des matrices réelles $n \times n$ symétriques et positives, alors

$$\big(\det(A)\big)^{\frac{1}{n}} + \big(\det(B)\big)^{\frac{1}{n}} \leq \big(\det(A+B)\big)^{\frac{1}{n}},$$

et qu'il n'y a égalité que si A et B sont positivement proportionnelles. En particulier, $A \mapsto \big(\det(A)\big)^{\frac{1}{n}}$ est convexe sur $\mathcal{S}_n^+$.

4) *Autre preuve de* **1).** Pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}$, montrer

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}(Ax, x)\right) dx = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(A)}}.$$

En déduire le résultat de **1)**.

Références :

- *Ex. 1* : Gourdon, Pb. 3 p. 339.
- *Ex. 2* : F. Rouvière, *PGCD, 2ème édition.* Ex. 42 p. 100 et Ex. 108 p. 319.
- *Ex. 4 1)* : Sujet Math. Géné. 2001 (extrait).