PREPARATION A L'AGREGATION DE MATHEMATIQUES 2007-08
UNIVERSITE DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS

# TD : THEOREMES DE POINTS FIXES

**Exercice 1 -** Soient $(E, d)$ un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application $k$-lipschitzienne avec $k < 1$. Montrer que $f$ admet un unique point fixe.

**Exercice 2 -** Soient $(E, d)$ un espace métrique complet et $f : E \to E$. On suppose que $f^q$ est $k$-lipschitzienne avec $k < 1$ pour un certain entier $q \geq 1$. Montrer que $f$ admet un unique point fixe.

**Exercice 3 -** Soient $(E, d)$ un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x$, $y \in E$ distincts. Montrer que $f$ admet un point fixe.

**Exercice 4 -** Un contre-exemple à l'exercice précédent dans le cas des espaces complets. On considère $C_0 = \{x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}$ muni de la norme $\|x\| = \sup_n |x_n|$ qui en fait un espace de Banach. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $e_k$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k$ qui vaut 1. On note $u : C_0 \to C_0$ l'application linéaire définie par

$$u(e_k) = (1 - \frac{1}{2^{k+1}})\, e_{k+1}$$

et $f : C_0 \to C_0$ l'application définie par

$$f(x) = \frac{1 + \|x\|}{2}\, e_0 + u(x).$$

**1-** Montrer que $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ pour tous $x$, $y \in C_0$ distincts.

**2-** Montrer que $f$ n'admet pas de point fixe.

**Exercice 5 -** Soient $I$ un intervalle compact non vide de $\mathbb{R}$ et $f \in C(I, I)$. Montrer que $f$ admet un point fixe.

**Exercice 6 -** Soient $E$ un espace vectoriel normé et $K$ un convexe compact non vide de $E$. Soit $G$ un ensemble d'applications affines continues de $E$ dans $E$ tel que $g(K) \subset K$ pour tout $g \in G$. On suppose que les éléments de $G$ commutent, i.e., $gh = hg$ pour tous $g$, $h \in G$. Le but est de démontrer qu'alors il existe $x \in K$ tel que $g(x) = x$ pour tout $g \in G$.

**1-** Soit $g : E \to E$ affine et continue et telle que $g(K) \subset K$. Montrer que $g$ admet un point fixe.

**2-** Soient $g : E \to E$ et $h : E \to E$ affines, continues et telles que $g(K) \subset K$ et $h(K) \subset K$. On suppose que $gh = hg$. Montrer qu'il existe $x \in K$ point fixe de $g$ et $h$. On pourra introduire l'ensemble $L = \{x \in K;\ g(x) = x\}$.

**3-** Etendre le résultat précédent au cas d'un nombre fini quelconque d'applications affines continues qui commutent et qui préservent $K$.

**4-** Conclure. On pourra raisonner par l'absurde, introduire les ensembles $\Omega_g = \{x \in K;\ g(x) \neq x\}$ pour $g \in G$ et utiliser un argument de recouvrement ad hoc.