**Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,**

*TD, Année 2007-2008*

**Relations de comparaison.**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles, $f$, $g$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

**Exercice 1 (Relations de comparaison)**

1) Ecrire la définition de $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Donner les liens avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$. Idem pour la comparaison des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ en $a$.

2) Signification dans les cas où $v_n = 1$.

3) Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et que si $v_n > 0$, alors il existe $N$ tel que $u_n > 0$ pour tout $n \geq N$.

4) Lien entre $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))$ ? Montrer qu'alors $f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(f(x))$

**Exercice 2 (exp et ln)**

1) Montrer que $\ln(x + \sqrt{x^2-1}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$.

2) Que dire de $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ lorsque $u_n \sim v_n$ ? Même question avec $\ln u_n$ et $\ln v_n$.

**Exercice 3 (Danger : somme d'équivalences)**

On suppose que $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x)$ et $g_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$.

1) Donner un exemple où $f_1(x) + g_1(x)$ n'est pas équivalent à $f_2(x) + g_2(x)$ quand $x \to a$.

2) Montrer que si $f_2 > 0$ et $g_2 > 0$, alors l'équivalence est valable.

**Exercice 4 (Relations de comparaison et séries)**

1) Montrer que si $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ et $v_n \geq 0$, la convergence de $\sum v_n$ implique la convergence de $\sum u_n$ et que la divergence de $\sum u_n$ implique la divergence de $\sum v_n$.

2) On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et que $u_n \geq 0, v_n \geq 0$.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} v_k\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k\right| + \varepsilon \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

b) En déduire que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

**Exercice 5 (Equivalence et développement limité)**

1) Si $f$ est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, montrer que $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \underset{h\to 0}{o}(h)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) On suppose que $f$ est dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

a) On suppose qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) = y$. Montrer que $fof(y+h) = y + u(y)h + \underset{h\to 0}{o}(h)$ où on précisera $u(y)$.

b) Soit $g(x) = \dfrac{xfof(x) - f(x)^2}{fof(x) - 2f(x) + x}$ que l'on suppose bien définie sur $]y-b, y[$ et sur $]y, y+b[$ avec $b > 0$ et avec toujours $f(y) = y$. Etudier la limite de $g(y+h)$ quand $h \to 0$.

**Exercice 6 (Méthode en $\alpha$)**

Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1) Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3) En utilisant que $e^h = 1+h+\frac{h^2}{2}+\underset{h\to 0}{o}(h^2)$, montrer que $\dfrac{1}{u_{n+1}^\alpha}-\dfrac{1}{u_n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha u_n^{\alpha+1}+\underset{n\to+\infty}{o}(u_n^{\alpha+1})}{u_n^{2\alpha}}$ pour tout $\alpha > 0$.

4) En prenant $\alpha = 1$, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.