Sous-Groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

On se donne $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe compact d'isomorphismes de $\mathbb{R}^n$. On veut montrer qu'il existe une forme quadratique q définie positive telle que $G \subset \mathcal{O}(q)$, autrement dit qu'il existe une forme quadratique q invariante par le groupe G, *i.e.* $\forall u \in G$, $q \circ u = q$.

0) On suppose G fini. Montrer que pour toute forme quadratique Q définie positive sur $\mathbb{R}^n$,

$$q \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{u \in G} Q \circ u$$

est une forme quadratique qui convient.

1) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n, et $K \subset \mathcal{E}$. On note $\mathrm{Conv}(K)$ l'enveloppe convexe de K.

a) Démontrer le Lemme de Carathéodory :

$$\mathrm{Conv}(K) = \Big\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1,\ x_i \in K \Big\}.$$

b) En déduire que si K est compact, $\mathrm{Conv}(K)$ est compact.

2) Un point fixe pour une application linéaire. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u(K) \subset K$ (K est stable par u). On souhaite montrer que u admet un point fixe dans K. Pour un $x_0 \in K$, on considère la suite des itérés $\big(u^k(x_0)\big)_{k \in \mathbb{N}}$.

a) Vérifier que $u^k(x_0)$ reste bien dans K pour $k \in \mathbb{N}$. La suite des itérés $\big(u^k(x_0)\big)_{k \in \mathbb{N}}$ est-elle nécessairement convergente ? (on pourra regarder en dimension 1).

b) On considère les moyennes de Césaro $x_k = \dfrac{1}{k+1} \displaystyle\sum_{j=0}^{k} u^j(x_0)$. Justifier que x_k reste bien dans K.

c) Calculer $u(x_k) - x_k$ pour $k \in \mathbb{N}$, et montrer que $u(x_k) - x_k \to 0$ quand $k \to +\infty$.

d) Conclure à l'existence d'un point fixe pour u en utilisant que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vit dans un compact.

3) Un théorème de point fixe collectif. Soit V un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{G} \subset GL(V)$ un sous-groupe compact. On suppose que $K \subset V$ est un compact convexe (non vide) tel que $u(K) \subset K$ quel que soit $u \in \mathcal{G}$.

a) Choix d'une bonne norme. On fixe N une norme euclidienne sur V, et on note, pour $x \in V$,

$$\nu(x) \equiv \sup_{v \in G} N\big(v(x)\big).$$

Vérifier que ν est une norme sur V, et préciser le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. Justifier également que si $u \in \mathcal{G}$ et $x \in V$, $\nu\big(u(x)\big) \leq \nu(x)$.

b) Soit $u_1, \ldots, u_p \in \mathcal{G}$. On considère $u \equiv \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} u_i$. Justifier l'existence d'un point fixe a pour u dans K, et montrer que a est un point fixe commun à tous les u_i, $1 \leq i \leq p$ en utilisant ν.

c) Pour $u \in \mathcal{G}$, on note $F_u \equiv \{x \in K,\ u(x) = x\}$ (ou $\Omega_u \equiv \{x \in K,\ u(x) \neq x\}$). Justifier qu'il existe un point fixe a dans K commun à tous les $u \in \mathcal{G}$.

4) Démonstration du résultat. On se place dans les hypothèses du théorème.

a) Ecriture comme un problème de point fixe. Vérifier que résoudre le problème, c'est trouver $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que, pour tout $u \in G$, ${}^t uAu = A$. On prend alors $V \equiv \mathcal{S}_n$, et on définit naturellement

$$\begin{aligned} \rho : GL_n &\to GL(\mathcal{S}_n) \\ u &\mapsto \big(A \mapsto {}^t uAu\big). \end{aligned}$$

Vérifier que $\mathcal{G} \equiv \rho(G)$ est un sous-groupe compact de $GL(\mathcal{S}_n)$, et que le problème est de trouver un point fixe $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ commun à tous les $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$.

b) Choix du compact. Montrer que $K \equiv \mathrm{Conv}\,\big\{ {}^t uu,\ u \in G\big\}$ est un compact de $\mathcal{S}_n$, stable par tout élément de $\mathcal{G}$. Conclure.

Références :

- **1)** X. Gourdon, (Algèbre) **Ex. 1** (p. 34);
- M. Alessandri, *Groupes en situation géométrique : agrégation de mathématiques.* Masson, (p. 140).