SERIES DE FOURIER & L^2.

Les notations sont celles de la feuille *Les principaux théorèmes sur les séries de Fourier.*

Ex. 1 : (encore) Le lemme de Riemann-Lebesgue. Soit $f \in \mathcal{C}^0$. A l'aide de l'inégalité de Bessel, montrer que $c_n(f) \to 0$ lorsque $|n| \to +\infty$. Déduire d'un argument de densité le lemme de Riemann-Lebesgue pour $f \in L^1$.

Ex. 2 : Théorème de convergence normale. Soit $f \in \mathcal{C}^0$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

1) Rappeler le lien entre $c_n(f)$ et $c_n(f')$. Que donne l'inégalité de Bessel pour f' ? En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$, *i.e.* que la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa somme ?

2) Démontrer l'inégalité de Sobolev : il existe $C > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux,

$$\|f - c_0(f)\|_{L^\infty} \le C\|f'\|_{L^2}.$$

On précisera la meilleure constante C.

Ex. 3 : Egalité de Parseval.

1) Justifier que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de L^2.

2) Existe-t-il $f \in L^2$ telle que pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \dfrac{\sqrt{|n|}}{2+|n|}$? Existe-t-il $f \in L^1$ telle que $c_n(f) = \dfrac{1}{1+|n|}$?

3) Démontrer le résultat suivant :

si $f \in L^1$, alors $f \in L^2$ si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 < +\infty$, auquel cas l'égalité de Parseval est valable.

4) Démontrer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger : il existe $C > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}^1$,

$$\|f - c_0(f)\|_{L^2} \le C\|f'\|_{L^2}.$$

On précisera la meilleure constante C, et le cas d'égalité.

5) On considère $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = 0$ si $-\pi \le x < 0$ et $f(x) = x$ si $0 \le x \le \pi$. Déterminer les projections orthogonales de f, dans l'espace de Hilbert $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, sur Vect $\big(1, \sin(x), \cos^2(x)\big)$ ainsi que sur Vect $\big(\sin(x), e^{2ix}\big)$.

Ex. 4 : Théorème de S. Bernstein. Suivre GOURDON, Ex. 6 p. 264.

Ex. 5 : Parseval & Plancherel. Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, et $T_0 > 0$ tel que Supp $(f) \subset [-T_0, T_0]$.

1) Pour $T > T_0$, on peut considérer la $2T$-périodisée f_T de f. Calculer ses coefficients de Fourier $2T$-périodiques $c_n(f_T) = \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{+T} e^{-in\delta x} f(x)\, dx$ en fonction de la transformée de Fourier de f, où δ est tel que $\delta T = \pi$.

2) En déduire l'égalité $2\pi \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \delta \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n\delta)\right|^2$. Quel est le lien *formel* avec la formule de Plancherel ?

3) *a)* On fixe $A \geq 1$. Justifier, pour $\delta > 0$, l'inégalité

$$\left|2\pi \int_{\mathbb{R}} |f|^2 - \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2\right| \leq \int_{|\xi| \geq A} |\hat{f}|^2 + \delta \sum_{n \in \mathbb{Z},\ \delta|n| \geq A} \left|\hat{f}(n\delta)\right|^2 + \left|\int_{-A}^{+A} |\hat{f}|^2 - \delta \sum_{n \in \mathbb{Z},\ \delta|n| \geq A} \left|\hat{f}(n\delta)\right|^2\right|.$$

b) Démontrer que le dernier terme tend vers 0 lorsque $\delta \to 0$.

c) On suppose $f \in \mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe une constante C, dépendant de f, telle que, $\forall |\xi| \geq 1$, $|\hat{f}(\xi)|^2 \leq \dfrac{C}{|\xi|^2}$.

d) Donner un équivalent simple, lorsque $p \to +\infty$, de $\displaystyle\sum_{n \geq p} \frac{1}{n^2}$. En déduire que le deuxième terme de l'inégalité obtenue en **3)** *a)* est

$$\leq \frac{2C}{\delta} \sum_{n \geq \frac{A}{\delta}} \frac{1}{n^2} \to \frac{2C}{A} \qquad \text{quand} \quad \delta \to 0.$$

e) Passer à la limite la majoration obtenue **3)** *a)* quand $\delta \to 0$, puis quand $A \to +\infty$ (on remarquera que le membre de gauche ne dépend pas de δ), et conclure que $2\pi \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 = \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n\delta)\right|^2$.