Théorème d'échantillonnage de Shannon.

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ on définit sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi}\, dx.$$

Dans ce cas, la formule d'inversion devient : si $f \in L^1$ et $\hat{f} \in L^1$, alors $f \in \mathcal{C}_0$ et

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Par ailleurs, $\mathcal{F}$ s'étend toujours à L^2 et la formule de Plancherel devient : $|f|_{L^2} = |\hat{f}|_{L^2}$.

On définit l'ensemble BL^2 des signaux à spectre borné comme

$$BL^2 \equiv \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}),\ \hat{u} = 0 \text{ p.p. sur } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\}.$$

On le munit du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $L^2(\mathbb{R})$.

1) Vérifier que BL^2 est un espace de Hilbert.

2) Etablir que si $u \in BL^2$, alors $u \in \mathcal{C}_0$ et $|u|_\infty \le |u|_{L^2}$. On utilisera la formule d'inversion de Fourier.

3) On définit la fonction $\sin_c(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, naturellement prolongée par 1 en $x = 0$, ainsi que pour $k \in \mathbb{Z}$, les fonctions $e_k(x) = e^{2i\pi kx} 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \in L^2(\mathbb{R})$.

a) Calculer $\mathcal{F}(e_k)$.

b) Que pensez-vous de l'application $\mathfrak{F} : BL^2 \to L^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ qui envoie u sur $\hat{u}_{|[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$? En déduire que la famille $\big(\sin_c(\cdot - k)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de BL^2.

c) En déduire que si $u \in BL^2$, alors

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle u, \sin_c(\cdot - k) \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \sin_c(\cdot - k)$$

dans $L^2(\mathbb{R})$ mais aussi uniformément (utiliser **2)**) sur $\mathbb{R}$. Conclure alors que $\forall j \in \mathbb{Z}$, $u(j) = \langle u, \sin_c(\cdot - j) \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$, et donc

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) \sin_c(x - k).$$

d) Retrouver par calcul direct que $\forall j \in \mathbb{Z}$, $\langle u, \sin_c(\cdot - j) \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = u(j)$ en utilisant que $\mathcal{F}$ est une isométrie et la formule d'inversion de Fourier.

e) En déduire enfin que l'application $BL^2 \to \ell^2(\mathbb{Z})$ qui envoie u sur $\big(u(k)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une isométrie, et que si u, $v \in BL^2$, alors

$$|u|_{L^2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u(k)|^2, \qquad \int_{\mathbb{R}} u\bar{v} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\bar{v}(k).$$

f) On suppose $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ à support dans $]0, 1[$. Que vaut $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) \sin_c(x - k)$? Qu'en conclure sur u ?

4) *a)* En utilisant la formule d'inversion, montrer que si $u \in BL^2$, alors $u \in \mathcal{C}^\infty$ et que toutes ses dérivées tendent vers 0 en $\pm\infty$.

b) Etablir que si $u \in BL^2$, u est en fait la somme d'une série entière de rayon infini.

c) Démontrer que si $u \in L^1_c$ n'est pas nulle, $\hat{u}$ ne peut pas être à support compact. Comparer avec **3)** *f)*.

5) On suppose $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Supp}(\hat{f}) \subset [-\Omega, \Omega]$. On se donne $0 < T \leq \dfrac{1}{2\Omega}$, et on note

$$F \equiv \hat{f} 1_{[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]}.$$

a) Calculer, à l'aide de la formule d'inversion, les coefficients de Fourier $1/T$-périodiques de F :

$$c_n = T \int_{1/(2T)}^{1/(2T)} F(\xi) e^{-in\xi 2\pi T}\, d\xi.$$

b) Ecrire f comme une intégrale de $-\Omega$ à Ω, et en déduire

$$f(x) = 2T\Omega \sum_{p\in\mathbb{Z}} f(2\pi pT) \frac{\sin\big(\Omega(x-2\pi pT)\big)}{\Omega(x-2\pi pT)}.$$

6) Soit $u \in BL^2$ et $\lambda \geq 1$. Vérifier que $u_\lambda(x) \equiv u(x/\lambda)$ définit $u_\lambda \in BL^2$. En déduire $u(x)$ comme la somme d'une série faisant intervenir des valeurs ponctuelles de u, et comparer avec la question **5)**. Donner alors d'autres bases hilbertiennes de BL^2, ainsi que les formules qui correspondent à **3)** *e)*.

Références :

- M. Willem, *Analyse harmonique réelle.* Hermann, chap. 6.3 (p. 126-128).
- **5)** Chambert-Loir & al., *Exercices d'Analyse - I*, Masson. (Ex. 5-4 p. 93);