Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Suites de fonctions, Année 2007-2008.

Exercice 1 (Exemples pratiques)

Etude de la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes. (Par étude de la convergence uniforme, on entend les intervalles (le plus grand ?) sur lesquels la convergence uniforme a lieu).

$$a)\, f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx), \quad b)\, g_n(x) = e^{-nx}\cos(nx),$$

$$c)\, h_n(x) = \frac{2x + n^2x^3}{1 + n^2x^2}, \quad d)\, k_n(x) = \frac{nx^2e^{-nx}}{(1 - e^{-x})^2}, \quad e)\, l_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^2}.$$

Exercice 2 (Limite uniforme et régularités)

1) Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.

2) Donner un exemple d'une suite de fonctions dérivables dont la limite uniforme n'est pas dérivable.

3) Donner l'exemple d'une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction continue mais pour laquelle on n'a pas convergence uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 3 (Limite uniforme de polynômes sur $\mathbb{R}$)

Montrer que la limite uniforme de polynômes sur $\mathbb{R}$ est un polynôme.
Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 (Approximation de l'exponentielle)

Montrer que $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to e^z$ sur tout compact de $\mathbb{C}$. (On utilisera la formule du binôme et on montrera que $C_n^k \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$.)

Exercice 5 (CVU, fonctions lipschitziennes, convexes)

1) Soit $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions $c-$lipschitziennes. On suppose que $f_n \to f$ simplement. Montrer que la convergence est uniforme. Prouver le même résultat pour $f_n : K \to \mathbb{R}$ où K est un compact d'un e.v.n.

2) Soit $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions convexes. On suppose que $f_n \to f$ simplement. Montrer que la convergence est uniforme sur tout $]\alpha, \beta[\subset [a, b]$.

Exercice 6 (Convergence uniforme et composée)

Soient $f_n, f, \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

1) Que peux-t'on dire de la CVU de $f_n \circ \phi$ vers $f \circ \phi$ et de celle de $\phi \circ f_n$ vers $\phi \circ f$?

2) Et si on suppose de plus ϕ continue ? u-continue ?

3) On pose $g_n = \frac{f_n}{1+f_n^2}$. Montrer que g_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 (Théorèmes de Dini)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f continue.

1) On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Montrer alors que la convergence est uniforme.

2) On suppose cette fois que chaque f_n est une fonction croissante. Montrer que dans ce cas aussi la convergence est uniforme.

Exercice 8 (Théorème de sélection de Helly)

1) Soit $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $|f_n(x)| \leq 1$ pour tout $x \in E$. On suppose E dénombrable. Montrer qu'il existe une sous-suite de (f_n) qui converge simplement vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$

2) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable

3) Soit $f_n : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ des fonctions croissantes. Montrer qu'il existe une sous-suite de (f_n) qui converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

Bibliographie : Gourdon (ex 3, 4, 7), Gianella Analyse 2 (ex 5, 8)