Préparation à l'agrégation de Mathématiques 2007/2008
Université de Nice-Sophia Antipolis

Suites numériques

Exercice 1: Soient $a, b > 0$. déterminez, si cela existe, $\lim_{n\to+\infty}(a^n + b^n)^{1/n}$.

Exercice 2: Soit (u_n) une suite réelle positive telle que $u_n \leq \frac{k}{n} + \frac{1}{k}$ pour tout $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrez que (u_n) converge vers 0.

Exercice 3: Soit (u_n) réelle définie par récurrence par $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est-elle convergente?

Exercice 4: Soit $a > 0$ et soit la suite u définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrez que u converge. Converge-t-elle rapidement? Indication: on pourra considérer la suite $n \mapsto (u_n - \sqrt{a})/(u_n + \sqrt{a})$.

Exercice 5: Soit (u_n) une suite réelle telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0. Montrez que (u_n/n) converge vers 0.

Exercice 6: Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente dont on note $l \in \mathbb{R}$ sa limite. Soit la suite réelle U définie par $U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} u_i$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrez que U converge vers l.

Exercice 7: Montrez que pour tout $n \geq 3$, l'équation $x^n = e^x$ admet au moins deux racines $u_n \in [0, 2[$ et $v_n \geq 2$. Montrez que (u_n) converge vers 1 et que (v_n) diverge vers $+\infty$. Donnez un développement asymptotique de u et de v quand $n \to +\infty$.

Exercice 8: Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ pour tout $n \geq 0$. Donnez un développement asymptotique de u.

Exercice 9: Pour $n \in \mathbb{N}$, soit x_n l'unique solution positive de $x^n + x = 3$. Déterminez un développement asymptotique de (x_n).

Exercice 10: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n$ existe et vaut 0. Montrez que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u est un intervalle fermé, ou bien l'ensemble vide.

Exercice 11: Soient $(a_n), (b_n)$ deux suites réelles strictement croissantes tendant vers $+\infty$. On suppose que $(a_{n+1} - a_n)$ tends vers 0. Montrez que $\{a_m - b_n /\, n, m \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12: Soit (u_n) une suite réelle telle qu'il existe $A > 0$ tel que $|u_{n+m} - u_n - u_m| \leq A$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$. Montrez que (u_n/n) est convergente (Ind: pensez aux suites de Cauchy).