Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

TD, Année 2007-2008

Continuité, dérivabilité.

Exercice 1 (Questions diverses à savoir)

1) Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $f(I)$ est un intervalle.

2) Soit f continue sur un intervalle I et à valeur dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

3) Rolle à l'infini : Soit $f \in C([a, +\infty[, \mathbb{R})$, dérivable sur $]a, +\infty[$, nulle en a et de limite 0 en $+\infty$. Montrer que f' s'annule sur $]a, +\infty[$.

4) Soit $f \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$, dérivable sur $]a, b[$ telle que f' possède une limite l en a. Alors f est dérivable en a et de dérivée l.

5) Donner un exemple d'une fonction discontinue partout sur $\mathbb{R}$ et telle que $|f|$ soit continue partout.

6) Problème du "marcheur" : On parcours à la marche 8 kilomètres en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant laquelle on a parcouru exactement 4 kilomètres.

7) Que peux-t'on dire des points de discontinuité d'une fonction monotone ?

8) Que dire des points de continuité de la fonction $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ qui vaut 0 sur les irrationnels et $1/q$ aux points p/q (fraction irréductible avec $q > 0$) ?

Exercice 2 (Equations fonctionnelles)

1) Trouver les fonctions $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable en 0 et telle que $g(2x) = 2g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable en 0 et telle que $f(2x) = f(x)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (A partir de l'ensemble de Cantor)

Rappel : On considère la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles selon : $K_0 = [0, 1]$, $K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 3/3]$, ... où à chaque fois, on découpe chaque segment en trois et on enlève le milieu. L'ensemble de Cantor est $K = \cap K_n$. (Faire un dessin.)

1) Est-ce que K est vide ?

2) On note λ la mesure de Lebesgue. Calculer $\lambda(K_n)$ et $\lambda(K)$.

3) On définit sur $[0, 1]$, la fonction $f_n(x) = \dfrac{1}{\lambda(K_n)} \displaystyle\int_0^x \mathbb{1}_{K_n}(t)\, dt$. (Faire un dessin.)

a) Montrer que f_n est croissante, que $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$.

b) Montrer que pour $x \in [a, b]$ un segment de K_n, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$. On note f sa limite.

c) Montrer que f est continue, croissante, que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que f est dérivable sur $[0, 1] \setminus K$ avec $f'(x) = 0$ sur $[0, 1] \setminus K$. A-t'on $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)\, dt$?

(Références : Gourdon, Pommellet, Rudin, ...)