Agrégation externe de Mathématiques

TD1: Le déterminant

E. AUBRY

Exercice 1 *Calculer le déterminant des matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, *calculer le déterminant d'ordre* n *suivant*

$$\det \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \not\equiv 0\,[\pi]$. *Montrer que le déterminant d'ordre* n *suivant vérifie*

$$\det \begin{pmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

Exercice 3 *Calculer les déterminants suivants*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha_1 & \cdots & \cos(n-1)\alpha_1 \\ 1 & \cos\alpha_2 & \cdots & \cos(n-1)\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\alpha_n & \cdots & \cos(n-1)\alpha_n \end{pmatrix}$$

Pour le premier, on pourra factoriser le polynôme $P(X)$ *obtenu en remplaçant* a_n *par* X.
Pour le second, on pourra commencer par établir l'égalité

$$\cos n\alpha = 2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \cos(n-2)\alpha$$

dont on déduit qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{Z}_n[X]$ *de dégré* n, *de coefficient dominant* 2^{n-1} *et tel que* $\cos n\alpha = P_n(\cos\alpha)$ *(polynômes de Tchebychev).*

Exercice 4 *Soit* $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. *On pose* $\omega = e^{2i\pi/n}$ *et* $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$. *Montrer l'égalité*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}}_{=A} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(1) & P(\omega) & \cdots & P(\omega^{n-1}) \\ P(1) & \omega P(\omega) & \cdots & \omega^{n-1} P(\Omega^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(1) & \omega^{n-1} P(\omega) & \cdots & \omega^{(n-1)^2} P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$$

En déduire le déterminant de A.

Exercice 5 *Calculer le déterminant des matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 *Soit* $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que si* A *est inversible alors*

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

En déduire que si A *et* C *commutent, alors* $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$. *Considérer le cas* $A = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 *Calculer l'inverse de la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(K)$. *Calculer le déterminant (resp . le rang) de la comatrice de* A *en fonction de celui de* A. *Calculer* $Com(Com(A))$ *et* $Com(A \times B)$ *en fonction de* $Com(A)$ *et* $Com(B)$.

Exercice 9 *Calculer le rang de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 *Montrer que l'ensemble des matrices inversibles est dense dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *(resp. dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*).*

Exercice 11 *Soit* $0 \leq r \leq n$ *et* $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Montrer que l'ensemble des matrices de* $\mathcal{M}_n(K)$ *de rang supérieur (resp. inférieur) à* r *est un ouvert (resp. un fermé) de* $\mathcal{M}_n(K)$. *Qu'en est t-il de l'ensemble des matrices de rang égal à* r *?*

Exercice 12 *Calculer la différentielle de l'application* $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Exercice 13 *Soit* $\mathcal{P}$ *un plan euclidien muni d'un repère Euclidien* $(0, \vec{i}, \vec{j})$ *et* $A(2,3)$, $B(1,5)$, $C(2,7)$ *trois points de* $\mathcal{P}$. *Calculer l'aire du triangle* $[A, B, C]$.

Exercice 14 *On munit* R^3 *de son orientation canonique. La base suivante* $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right)$ *est-elle directe?*

Exercice 15 *Soit* $\mathcal{P}$ *un plan affine et* (A, B, C) *trois points affinements libres de* $\mathcal{P}$. *On note* $(\alpha_M, \beta_M, \gamma_M)$ *les coordonnées barycentriques de tout point* $M \in \mathcal{P}$ *par rapport à* (A, B, C). *On munit* $\mathcal{P}$ *d'un produit scalaire* h. *On va montrer que si* $M \in [A, B, C]$, *alors*

$$\alpha_M = \frac{\mathrm{Vol}_h[M, B, C]}{\mathrm{Vol}_h[A, B, C]} \qquad \beta_M = \frac{\mathrm{Vol}_h[A, M, C]}{\mathrm{Vol}_h[A, B, C]} \qquad \gamma_M = \frac{\mathrm{Vol}_h[A, B, M]}{\mathrm{Vol}_h[A, B, C]}$$

On peut considérer que $(\mathcal{P}, h)$ *est un plan contenu dans un espace euclidien* $(E\mathbb{R}^3)$. *On note* H *un point de* E *situé sur la perpendiculaire à* $\mathcal{P}$ *passant par* M *et tel que* $|HM| = 1$. *Montrer que* $Vol[H, M, B, C] = \alpha \,\mathrm{Vol}[H, A, B, C]$. *En déduire le résultat.*

Exercice 16 *Soit* A *et* B *deux éléments de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On suppose qu'il existe* $P \in GL_n(\mathbb{C})$ *telle que* $B = P^{-1}AP$. *On note* Q *et* R *les matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $P = Q + iR$. *Montrer que pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *on a*

$$Q \times B = A \times Q, \qquad R \times B = A \times R \quad \text{et} \quad (Q + zR) \times B = A \times (Q + zR).$$

Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \det(Q + zR) \end{array}$$

est un polynôme non nul. En déduire qu'il existe $P' \in GL_n(\mathbb{R})$ *telle que* $B = P'A(P')^{-1}$.

(Autrement dit, des matrices réelles sont conjugées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *ssi elles sont conjuguées dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*).*