Agrégation externe de Mathématiques

TD: $Gl(E)$ et ses sous-groupes

E. AUBRY

<u>Références</u>:

M. Alessandri "Thèmes de géométrie", M. Berger "Géométrie",

R. Goblot "thèmes de géométrie", X. Gourdon "Algèbre",

R. Mneimné, F. Testard "Groupes de Lie classiques", D. Perrin "cours d'algèbre" ,

P. Tauvel "Mathématiques générales pour l'agrégation".

Dans la suite $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un K-ev de dimension n.

1 $Gl(E)$ et $Sl(E)$

Exercice 1 *Montrer que $Gl(E)$* **est un ouvert dense** *dans $End(E)$.*

Exercice 2 *Soit G un sous groupe de $Gl(E)$ tel que $g^2 = Id$ pour tout $g \in G$. Montrer que $CardG \leq 2^{\dim E}$ (on pourra commencer par montrer que G est abélien). En déduire que $Gl(E)$ est* **isomorphe à** *$Gl(F)$* **ssi** *E* **est isomorphe à** *F.*

Exercice 3 *Montrer que $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points est connexe par arc. En déduire que si $K = \mathbb{C}$ alors $Gl(E)$* **est connexe par arc** *(considérer $\{\lambda \in \mathbb{C} / \det\big(A + \lambda(Id - A)\big) \neq 0\}$).*

Exercice 4 *On note $Sl(E) = \{u \in Gl(E) / \det u = 1\}$. Soit α une forme linéaire non nulle sur E et $y \in \mathrm{Ker} \setminus \{0\}\, \alpha$. Montrer que $\big(Id + \alpha \otimes y\big)(x) = x + \alpha(x) y$ est un élément de $Sl(E)$ (cet endomorphisme est appelé transvection de E). En déduire que le centre de* $\mathbf{ZGl(E) = K^*.Id}$ **et que**

$$\mathbf{ZSl(E)} = \begin{array}{ll} \{\mathbf{e^{i2\pi/k}.Id / k \in \{0, \cdots, n-1\}}\} & \textbf{si } \mathbf{K} = \mathbb{C}, \\ \{\mathbf{Id}\} & \textbf{si } \mathbf{K} = \mathbb{R} \textbf{ et } \dim \mathbf{E} \textbf{ est impaire}, \\ \{\mathbf{-Id, Id}\} & \textbf{si } \mathbf{K} = \mathbb{R} \textbf{ et } \dim \mathbf{E} \textbf{ est paire}. \end{array}$$

Exercice 5 *Soit α une forme linéaire non nulle sur E et $y \in E$ tel que $\alpha(y) = 1$. Montrer que pour tout $\lambda \in K$, $Id + (\lambda - 1)\alpha \otimes y$ est de déterminant λ (appelé dilatation de rapport λ).*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}^* = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ sa base duale. Montrer que pour tout $i \neq j$, la transvection $Id + \lambda\alpha_i \otimes e_j$ (resp. la dilatation $Id + (\lambda - 1)\alpha_n \otimes e_n$) est de matrice $B_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda.E_{ij}$ (resp. $Diag(1, \cdots, 1, \lambda)$) dans la base $\mathcal{B}$. En déduire que **tout** *$u \in Gl(E)$* **est le produit d'une dilatation de rapport** $\det u$ **et d'un nombre fini de transvections** *(considérer la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$ et le résultat de la multiplication de A par une matrice $B_{ij}(-\lambda)$).*

En déduire que **Sl(E) est connexe** *et que* **si $\mathbf{K} = \mathbb{R}$, Gl(E) a deux composantes connexes $\mathbf{Gl^+(E) = \{u \in Gl(E) / \det u > 0\}}$ et $\mathbf{Gl^-(E) = \{u \in Gl(E) / \det u < 0\}}$ qui sont homéomorphes**.

Exercice 6 *Si $n \geq 3$, montrer que pour tout (i,j,k) deux à deux distincts on a*

$$B_{ij}(\lambda\mu) = B_{ik}(\lambda)B_{kj}(\mu)[B_{ik}(\lambda)]^{-1}[B_{kj}(\mu)]^{-1}$$

Si $n = 2$, montrer que

$$B_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} B_{12}(\lambda/3) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} [B_{12}(\lambda/3)]^{-1}$$

En déduire que **le groupe dérivé de $Gl(E)$ (resp. de $Sl(E)$) est $Sl(E)$.**

Exercice 7 *Soit $u \in Sl(E) \backslash \{Id\}$ tel qu'il existe un hyperplan H de E pour lequel $u_{|H} = Id_H$. Montrer qu'alors u est une transvection.*

Soit G un sous-groupe de $Gl(E)$ non contenu dans K^*Id et tel que $sGs^{-1} \subset G$ pour tout $s \in Sl(E)$. On va montrer qu'alors $G \supset Sl(E)$. En particulier, cela implique $\mathbf{PSl(E) = Sl(E)/ZSl(E)}$ **est simple** *et qu'***un sous groupe distinqué de $Gl(E)$ est soit contenu dans K^*Id, soit contient** $Sl(E)$.

1) On suppose $n \geq 3$. En utilisant $G \not\subset K^*Id$ et la preuve de l'exercice 3, montrer qu'il existe $u \in G$ et une transvection $Id + \alpha \otimes y$ tels que $u' = u^{-1} \circ (Id - \alpha \otimes y) \circ u \circ (Id + \alpha \otimes y) \in G \setminus \{Id\}$. Soit $F = \big(\mathrm{Ker}\,\alpha \cap \mathrm{Ker}\,{}^t u(\alpha)\big)$ et $z \in F \setminus \{0\}$ (possible car $n \geq 3$). Montrer que $u'(z) = z$. Si pour tout $\beta \in z^{\perp}$ on a $\beta \circ u' = \beta$ montrer qu'alors ${}^t u'$ (et donc u') est une transvection. Sinon, soit $\beta \in z^{\perp}$ telle que $u' \circ \beta \neq \beta$, alors $(u')^{-1} \circ (Id - \beta \otimes z) \circ u' \circ (Id + \beta \otimes z)$ est une transvection. Donc G contient au moins une transvection, et d'aprés l'exercice 5, on a $Sl(E) \subset G$.

2) On suppose $n = 2$. Montrer qu'il existe $u \in G$ et une transvection $Id + \alpha \otimes y$ telle que $u' = u^{-1} \circ (Id - \alpha \otimes y) \circ u \circ (Id + \alpha \otimes y) \in G \setminus \{K^*Id\}$. En déduire qu'il existe $e_1 \in E$ tel que (e_1, e_2), où $e_2 = u'(e_1)$, soit une base de E. Montrer que la matrice de u' dans la base (e_1, e_2) est de la forme $U' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & v \end{pmatrix}$. On pose $B = \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ et $T_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -4\lambda/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $A = B^{-1}(U')^{-1}BU'$ est la matrice d'un élément de G et $ATA^{-1}T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est encore la matrice d'un élément de G. Comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$, en déduire que $Sl_2(K) \subset G$.

2 $O(E)$ et $SO(E)$

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien. On appelle réflexion de E toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E. On appelle retournement de E toute smétrie orthogonale par rapport à un sous espace de codimension 2 (montrer que c'est alors un élément de $SO(n)$).

Exercice 8 *Soit $u \in O(E)$. Montrer que E est la somme orthogonale de $E_1(u)$, $E_{-1}(u)$ et de plans stables par u (on pourra montrer que $u + u^{-1}$ est autoadjoint). En déduire qu'il existe une BON de E dans laquelle la matrice de u est de la forme:*

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_k) \end{pmatrix}$$

où $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. En déduire que $SO(E)$ **est compact et connexe par arcs** *et que $O(E)$* **est compact et admet deux composantes connexes homéomorphes**.

Exercice 9 *Montrer que* $R(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. *Soit* $u \in O(E)$ *et* $k = \dim Fix(u)$. *Alors il existe* $n-k$ *réflexions (resp. retournements)* (s_i) *de points fixes* H_i *telles que* $u = s_1 \circ \cdots \circ s_{n-k}$ *et* $Fix(u) \subset \cap_{i=1}^{n-k} H_i$. *De plus,* u *ne peut-être composée de moins de* $n-k$ *réflexions. Montrer que, par contre,* u *est le produit de deux symétries.*

Exercice 10 *Calculer* $ZO(E)$ *et* $ZSO(E)$ *(distinguer les cas* $n = 2$, n *paire et nimpaire).*

Exercice 11 *Montrer que si* s *et* s' *sont des réflexions (resp. des retournements) alors elles sont conjugées (resp. dans* $SO(E)$*).*

En déduire que **le groupe dérivé de** $O(E)$ **est** $SO(E)$ **(si** $n \geq 2$**)**. *Montrer que* **le groupe dérivé de** $SO(E)$ **est** $SO(E)$ **(si** $n \geq 3$**)**. *Montrer que si* $\mu : \big(O(E), \circ\big) \to (\mathbb{R}, +)$ *est un morphisme de groupe, alors* $\mu \equiv 1$.

Exercice 12 **Si** $\dim E = 3$**, alors** $SO(E)$ **est simple**: *soit* $G \neq \{Id\}$ *un sous groupe distingué de* $SO(3)$ *et* $u \in G \setminus \{Id\}$. *Montrer qu'il existe une base* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *orthonormée de* E *telle que* $Mat_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. *Montrer qu'on peut supposer que* $\theta \in]\pi/2, \pi]$ *(considérer les itérés* u^k*). On pose* $x_t = \cos t \cdot e_1 + \sin t \cdot e_2$, *montrer qu'il existe* $t_0 \in]0, 1[$ *tel que* $\langle u(x_{t_0}), x_{t_0}\rangle = 0$. *On note* s *la symétrie orthogonale par rapport à* $\mathbb{R} \cdot y$ *et* $v = s \circ u \circ s^{-1} \circ u^{-1}$. *Montrer que* $v \in G$ *et que* $v\big(u(x_{t_0})\big) = -u(x_{t_0})$. *En déduire que* v *est un retournement inclus dans* G *puis que* $G = SO(E)$.

Exercice 13 **Si** $\dim E \neq 4$**, alors** $SO(E)/ZSO(E)$ **est simple**: *les cas* $n = 1$ *et* 2 *sont triviaux et le cas* $n = 3$ *est l'objet de l'exercice 12.*

Soit G *un sous groupe distingué de* $SO(E)$ *et* $u \in G \setminus \{\pm Id\}$. *Montrer qu'il existe un plan* P *de* E *tel que* $u(P) \neq P$. *On pose* $F = P + u(P)$. *Montrer que* $F^\perp \neq \{0\}$ *et que si* s *est le retournement par rapport à* P *alors* $v = s \circ u \circ s^{-1} \circ u^{-1} \in G \setminus \{Id\}$ *et* $v_{|F^\perp} = Id_{|F^\perp}$. *Soit donc* $x \in F^\perp \setminus \{0\}$ *et* $y \in F$ *tel que* $v(y) \neq y$. *On note* t_x, t_y *les réflexions par rapport à* $x^\perp$ *et* $y^\perp$ *et* $\sigma = t_x \circ t_y$. *Montrer que* $\sigma' = v \circ \sigma \circ v^{-1} \circ \sigma^{-1} \in G$, *que* $\sigma' = t_x \circ t_{v(y)}$ *et donc que* σ' *est un retournement contenu dans* G. *En déduire que* G *contient* $SO(E)$.

3 Décompositions et applications

Exercice 14 *Soit* $E_i \subset E_{i+1}$ *des sous-espaces de* E *tels que* $\dim E_i = i$ *pour tout* $i \in \{1, \cdots, n\}$. *Montrer que* $T = \{u \in Gl(E) / u(E_i) \subset E_i, \forall i\}$ *est un sous-groupe de* $Gl(E)$. *Montrer que pour tout* $u \in Gl(E)$, *il existe* $o \in O(E)$ *et* $t \in T$ *tel que* $u = o \circ t$.

Montrer que

$$\begin{array}{ccc} O(E) \times T & \to & Gl(E) \\ (o, t) & \mapsto & o \circ t \end{array}$$

est un homéomorphisme. En déduire que $Gl(E)$ *est homéomorphe à* $O(E) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. *Montrer que la décomposition existe toujours (mais n'est pas unique) si* $u \in L(E)$.

Montrer que si $K = \mathbb{C}$ *et* E *est hermitien alors le même résultat est valable avec* $O(E)$ *remplacé par* $U(E)$.

Exercice 15 *Montrer que pour toute matrice* A *symétrique positive il existe* T *triangulaire supérieure telle que* $A = {}^t TT$. *En déduire que* $\det A \leq a_{11} \times \cdots \times a_{nn}$. *En déduire que pour toute matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *on a* $|\det M| \leq \inf\big(\prod_{i=1}^n \|c_i\|, \prod_{i=1}^n \|l_i\|\big)$, *où* c_i *(resp.* l_i*) est la i-ème colonne (resp. ligne) de* M.

Exercice 16 *On munit* $\mathbb{C}$ *de l'ordre lexicographique (i.e* $z \leq z'$ *ssi on a* $\Re(z) < \Re(z')$ *ou on a* $\Re(z) = \Re(z')$ *et* $\Im(z) \leq \Im(z')$*). Pour tout polynôme de dégré* d, *on note* $\lambda_1(P) \leq \cdots \leq \lambda_d(P)$

les racines de P dans $\mathbb{C}$ (où elles apparaissent un nombre de fois égal à leur multiplicité). Si $P = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$, on pose $M_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $U \in U(d)$ telle que $M_P = U \begin{pmatrix} \lambda_1(P) & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_d(P) \end{pmatrix} U^{-1}$. En déduire la continuité de l'application

$$\begin{array}{rcl} R : \{\text{polynômes de degré } d\} & \to & \mathbb{C}^d \\ P & \mapsto & \big(\lambda_1(P), \cdots, \lambda_d(P)\big) \end{array}$$

Exercice 17 *Soit $u \in Gl(E)$. Montrer que si $K = \mathbb{R}$ alors il existe un unique couple $(o, s) \in O(E) \times Sym^{++}(E)$ tel que $u = o \circ s$ (où $S^{++}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs). Montrer que l'application*

$$\begin{array}{rcl} O(E) \times Sym^{++}(E) & \to & Gl(E) \\ (o, s) & \mapsto & o \circ s \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Si $K = \mathbb{C}$ et E est hermitien, montrer que le même résultat est valable avec $O(E)$ remplacé par $U(E)$ et $S^{++}(E)$ =endomorphismes hermitiens définis positifs.

Exercice 18 *Soit E un espace Euclidien. On munit $L(E)$ de la norme asociée au produit scalaire de E et on note B la oule unité fermée pour cette norme. Montrer que B est l'enveloppe convexe de $O(E)$ (on pourra utiliser Hahn Banch et le fait que les formes linéaires sur $L(E)$ sont toutes de la forme $L_v(u) = \mathrm{tr}(u \circ v)$). Montrer $O(E)$ est l'ensemble des points extrémaux de B.*

Exercice 19 *Soit G un sous-groupe de $Sl(E)$ qui contient $SO(E)$ strictement, on va montrer qu'alors $G = Sl(E)$.*

Dans le cas $n = 2$, montrer qu'il existe $\lambda > 1$ tel pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et tout $k \in \mathbb{N}$, G contient un élément u_k dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & 1/\lambda^k \end{pmatrix}$. Conclure en considérant les valeurs propres des éléments de G de la forme $r_\theta \circ u_k \circ r_\theta^{-1}$.

Dans le cas $n \geq 3$ on procède par récurrence sur n. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ tels que $\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n = 1$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et pour toute base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, G contient un élément u dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. On note $E' = \mathrm{Vect}\,(e_1, \cdots, e_{n-1})$ et $G' = \{g \in G / g(e_n) = e_n,\ g(E') \subset E'\}$. Montrer que $g \mapsto g_{|E'}$ injecte G' dans un sous groupe de $Sl(E')$ contenant strictement $O(E')$ (considérer $u \circ w \circ u^{-1} \circ w^{-1}$ avec $w \in O(E)$ vérifiant $w(e_n) = e_n$, $w(e_1) = e_2$ et $w(e_2) = e_1$). Par hypothèse de récurrence, on a G' isomorphe à $Sl(E')$. En déduire que G contient toutes les tranvections $Id + \alpha \otimes v$ avec $\alpha(e_n) = 0$. Comme $\mathcal{B}$ est quelconque, en déduire que Gc contient toutes les transvections, et donc $G = Sl(E)$.