Interpolation polynomiale

Notons $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n+1$ points $x_0, \ldots, x_n$ dans l'intervalle $[a,b]$, distincts, non nécessairement rangés par ordre croissant. On pose le problème suivant :

$$\text{Existe-t-il un polynôme } p_n \in \mathcal{P}_n \text{ tel que } p_n(x_i) = f(x_i),\ \forall i = 0, \ldots, n\,?$$

Un tel polynôme sera appelé polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, \ldots, x_n$. On a le résultat suivant :

Théorème 1 *Le problème d'interpolation admet une unique solution.*

Exercice 1 - *Démonstration du théorème.* En écrivant $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, ramener le problème d'interpolation à la résolution d'un système linéaire, calculer son déterminant et conclure.

La résolution numérique de ce système n'étant pas recommandable, on met en place des méthodes de calcul moins coûteuses du polynôme p_n.

Exercice 2 - *Méthode de Lagrange.* Posons :

$$\ell_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Montrer que $\ell_i \in \mathcal{P}_n$, que $\ell_i(x_k) = 0$ si $k \neq i$ et $\ell_i(x_i) = 1$. En déduire que la famille $\{\ell_i(x)\}_{i=0,\ldots,n}$ forme une base de $\mathcal{P}_n$ et montrer la formule :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x).$$

Cette méthode de calcul de p_n a un défaut majeur : si l'on décide d'ajouter un point d'interpolation, il faut recalculer toute la base ℓ_i. On envisage donc une autre approche permettant d'ajouter des points facilement.

Exercice 3 - *Méthode de Newton.* Notons p_k le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, \ldots, x_k$.

1. Montrer qu'il existe un coefficient noté $f[x_0, \ldots, x_k]$ tel que :

$$p_k - p_{k-1} = f[x_0, \ldots, x_k] \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}), \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

   En déduire la formule :

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}).$$

2. Préciser la valeur de $f[x_i]$ puis montrer la formule suivante :

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

   On pourra considérer le polynôme q_{k-1} interpolant f aux points $x_1, \ldots, x_k$ et montrer que

$$(x_k - x_0)p_k(x) = (x - x_0)q_{k-1}(x) - (x - x_k)p_{k-1}(x).$$

   La quantité $f[x_0, \ldots, x_k]$ est appelée la différence divisée d'ordre k de f aux points $x_0, \ldots, x_k$.

3. En déduire un algorithme pratique de calcul des différences divisées.
4. Montrer que l'on peut factoriser le polynôme $p_n(x)$ suivant la règle de Hörner sous la forme :

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)\Big(f[x_0, x_1] + (x - x_1)\big(f[x_0, x_1, x_2] + \ldots + (x - x_{n-1})f[x_0, \ldots, x_n]\big)\Big)$$

   et en déduire un algorithme itératif de calcul de $p_n(x)$.
5. Supposons que l'on rajoute un point d'interpolation x_{n+1}. Que suffit-il de faire pour calculer le polynôme d'interpolation $p_{n+1}(x)$?

Nous nous intéressons maintenant à l'erreur d'interpolation. Notons la norme uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ par :

$$||f|| = \max_{a \le x \le b} |f(x)|.$$

On note l'erreur d'interpolation en un point $x \in [a, b]$ par $E_n(f)(x) := f(x) - p_n(x)$. Soit le polynôme $\pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$. On a le résultat suivant :

Théorème 2 *Supposons que f est $n + 1$ fois dérivable sur $[a, b]$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe un point $\xi_x \in]\min(x, \{x_i\}), \max(x, \{x_i\}[$ tel que :*

$$E_n(f)(x) = \frac{1}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x)f^{(n+1)}(\xi_x).$$

Exercice 4 - *Démonstration du théorème.*

1. Que se passe-t-il si x est l'un des x_i ?
2. On suppose que x est distinct des x_i. Soit le polynôme $q_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{E_n(f)(x)}{\pi_{n+1}(x)}\pi_{n+1}(t)$. Montrer que q_{n+1} est le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, \ldots, x_n, x$.
3. Soit la fonction $F(t) = f(t) - q_{n+1}(t)$. Montrer que sa dérivée $(n + 1)$-ième s'annule. Conclure.
4. En déduire la majoration uniforme :

$$||f - p_n|| \le \frac{1}{(n+1)!}||\pi_{n+1}|| \cdot ||f^{(n+1)}||.$$

5. Pour $f(x) = \exp(x)$, montrer que $\lim_{n \to +\infty} ||f - p_n|| = 0$.

La formule montre que la taille de l'erreur dépend non seulement de la fonction f, mais aussi du choix des points d'interpolation. Il n'est pas vrai en général que la suite p_n converge vers f quand n tend vers l'infini, même en convergence simple. Un contre-exemple célèbre est donné par la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour des points équirépartis sur l'intervalle $[-1, 1]$ (phénomène de Runge). On peut par ailleurs montrer que le meilleur choix de points d'interpolation consiste à prendre les racines des polynômes de Tchebychev. Il existe aussi des critères de convergence pour les fonctions analytiques. Pour ceci, voir [1].

Références

[1] Jean-Pierre Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, PUG.

[2] Michelle Schatzman, *Analyse numérique, une approche mathématique*, Dunod.