# Interpolation polynomiale — Correction des exercices

**Exercice 1** - On doit résoudre le système linéaire à $n+1$ équations :

$$\Big\{ \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq n \Big\}.$$

Son déterminant est le déterminant de Vandermonde :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

On sait que $\Delta = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$ donc $\Delta$ est non nul puisque les $x_i$ sont distincts. Ainsi le système a une solution unique.

**Exercice 2** - Les premières assertions sont claires. On en déduit aisément que la famille est libre et forme une base. En décomposant $p_n = \alpha_0 \ell_0 + \ldots + \alpha_n \ell_n$ et en évaluant en $x_i$ on obtient $\alpha_i = f(x_i)$.

**Exercice 3** -

1. Le polynôme $p_k - p_{k-1}$ est de degré $k$ et s'annule en $x_0, \ldots, x_{k-1}$. Avec $p_0(x) = f(x_0)$ on déduit la formule.
2. On doit poser $f[x_i] = f(x_i)$. On évalue $(x - x_0)q_{k-1}(x) - (x - x_k)p_{k-1}(x)$ en $x_i$ : on trouve $(x_k - x_0)f(x_i)$ pour tout $i = 0, \ldots, k$. On conclut par unicité du polynôme d'interpolation.
3. On range les valeurs $f$ dans un tableau $T[i] := f(x_{n-i})$, $i = 0, \cdots, n$. A l'étape 1 on fait $T[i] = \frac{T[i]-T[i+1]}{x_{n-i}-x_{n-i-1}}$ pour $i = 0, \ldots, n-1$. A l'étape 2 on fait $T[i] = \frac{T[i]-T[i+1]}{x_{n-i}-x_{n-i-2}}$ pour $i = 0, \ldots, n-2$, et ainsi de suite. Au bout de $n$ étapes, $T[i]$ contient la valeur de $f[x_0, \ldots, x_i]$.
4. La factorisation est claire. Le calcul de $p_n$ se fait par récurrence descendante :
$$\begin{aligned} u_n &= f[x_0, \ldots, x_n] \\ u_k &= f[x_0, \ldots, x_k] + (x - x_k)u_{k+1}, \quad 0 \leq k < n. \end{aligned}$$
Alors $u_0 = p_n(x)$.
5. Si l'on rajoute $x_{n+1}$ au bout du tableau, il y a seulement $n+1$ calculs à faire pour calculer la nouvelle table $T$.

**Exercice 4** -

1. Si $x = x_i$, alors $E_n(f)(x_i) = 0$ et $\pi_{n+1}(x_i) = 0$ donc le résultat est vrai (en prenant par exemple $\xi_{x_i} = x_i$).
2. Remarquer que $q_{n+1}(x_i) = f(x_i)$, $q_{n+1}(x) = f(x)$ et $\deg q_{n+1} = n+1$. Appliquer le Théorème 1.
3. La fonction $F(t)$ s'annule $n+2$ fois dans l'intervalle donné en énoncé. D'aprés le théorème de Rolle itéré, il existe $\xi_x$ dans cet intervalle ouvert tel que $F^{(n+1)}(\xi_x) = 0$. Ceci conclut.
4. Clair.
5. On a $||f^{(n+1)}|| = \exp(b)$ et $||\pi_{n+1}|| \leq (b-a)^{n+1}$ donc $||E_n|| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \exp(b) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.