Localisation des racines

Les méthodes de localisation, estimation et séparation des racines d'un polynôme sont très nombreuses. Nous allons en étudier quelques classiques. Pour plus d'information, voir par exemple [?]. On commence par une estimation assez grossière mais bien utile :

Exercice 1 - *Localisation grossière.*
Soit $P(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_0$ un polynôme à coefficients complexes, de racines $z_1, \ldots, z_d$. Posons $R := \max_{1\leq k\leq d}\{|z_k|\}$.

1. Soit $Q(X) = X^d - |a_{d-1}|X^{d-1} - \ldots - |a_0|$. Montrer que Q a une unique racine réelle $r > 0$ et que $R \leq r$.
2. Soit $A > 0$ tel que $A^d > |a_{d-1}|A^{d-1} + \ldots + |a_0|$. Montrer que $r < A$.
3. En choisissant A convenablement, montrer que $R < 1 + \max_{0\leq k\leq d-1}\{|a_k|\}$.

Exercice 2 - *Racines réelles : Suite de Sturm.*
Soit P un polynôme à coefficients réels, supposé sans racines multiples. On considère la suite de polynômes $p_0, p_1, \ldots, p_s$ définie par :

$$p_0 = P,\ p_1 = P',\ \text{puis pour } 1 \leq i \leq s-1 : p_{i+1} = -p_{i-1} \mod p_i,$$

s'arrêtant à $p_s = \mathrm{pgcd}(P, P')$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $V(x)$ le nombre de changements de signes dans la suite $(p_0(x), \ldots, p_s(x))$ (un zéro n'est pas compté comme un changement de signe). On considère un intervalle $[a, b]$ tel que $P(a)P(b) \neq 0$.

1. Montrer que pour $0 \leq j \leq s-1$, p_j et p_{j+1} ne s'annulent pas simultanément.
2. Montrer que $V(x)$ ne change pas sur tout intervalle contenu dans $[a, b]$ sur lequel aucune des fonctions p_j ne s'annule.
3. Montrer que $V(x)$ ne change pas lorsque x traverse une racine de p_j, $1 \leq j < s$.
4. Montrer que $V(x)$ diminue de 1 lorsque x traverse une racine de P.
5. Montrer que le nombre de racines réelles de P dans l'intervalle $[a, b]$ est $V(a) - V(b)$.
6. Décrire un algorithme de localisation à précision fixée des racines réelles de P utilisant la suite de Sturm.
7. Si le polynôme initial a une racine multiple, quelle modification faut-il faire ?

Exercice 3 - *Racines complexes : Méthode de Weierstrass.*
Soit $P(X) = X^d + a_1X^{d-1} + \ldots + a_d$ un polynôme à coefficients complexes, de racines $\xi_1, \ldots, \xi_d$ supposées distinctes. Pour $z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d$, on note la k-ième fonction symétrique élémentaire par $\sigma_k(z) := (-1)^k \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq d} z_{i_1}\cdots z_{i_k}$. On rappelle que le déterminant jacobien de l'application $z \mapsto (\sigma_i(z))_{i=1,\ldots,d}$ est le déterminant de Vandermonde en z. On définit l'application $\Sigma\colon \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ par $\Sigma(z) = (\sigma_1(z) - a_1, \ldots, \sigma_d(z) - a_d)$.

1. Caractériser les $z \in \mathbb{C}^d$ tels que $\Sigma(z) = 0$. En déduire un algorithme d'approximation simultanée de toutes les racines de P.
   L'algorithme de Newton-Raphson a le défaut de demander le calcul de l'inverse de la jacobienne. Nous allons l'éviter en reformulant le calcul.
   Soit $\mathbb{C}[X]_{d-1}$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à $d-1$. Pour $z \in \mathbb{C}^d$, posons $f_z(X) := \prod_{i=1}^{d}(X - z_i)$ et définissons l'application $F\colon \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}[X]_{d-1}$ par $F(z) = f_z(X) - P(X)$.
2. Quel est le lien entre F et Σ ?
3. Montrer que l'équation $F'(z) \cdot u = F(z)$ admet une unique solution et la calculer (on pourra introduire la base de Lagrange associée à $z_1, \ldots, z_d$).
4. En déduire une optimisation de l'algorithme précédent. Quelles sont les conditions de sa convergence ?

Références

[1] Maurice Mignotte, *Mathématiques pour le calcul formel*, PUF.