Localisation des racines
— Correction des exercices —

Exercice 1 -

1. On écrit $Q(x) = x^d f(x)$ où f est une fonction continue, strictement croissante et bijective de $]0, +\infty[$ dans $]-\infty, 1[$. Elle admet donc une unique racine réelle $r > 0$. On obtient facilement $R^d \leq |a_{d-1}|R^{d-1} + \ldots + |a_0|$ soit $Q(R) \leq 0$, donc $R \leq r$.
2. Pour un tel A, $Q(A) > 0$ donc $R \leq r < A$.
3. Posons $M := \max\limits_{1\leq k\leq d}\{|a_k|\}$ et prenons $A = 1 + M$: $A^d = M(A^{d-1} + \ldots + 1) + 1 > |a_{d-1}|A^{d-1} + \ldots + |a_0|$, donc $R < 1 + M$.

Exercice 2 -

1. Puisque P n'a pas de racine multiple, $\mathrm{pgcd}(P, P') = 1 = \mathrm{pgcd}(p_j, p_{j+1})$ par l'algorithme d'Euclide, donc p_j et p_{j+1} n'ont pas de racine commune.
2. C'est clair.
3. Si $p_j(x) = 0$, alors $p_{j-1}(x)$ et $p_{j+1}(x)$ sont non nuls d'après la première question, et sont de signe opposé puisque $p_{j-1} = p_j Q - p_{j+1}$. En faisant les tableaux de signes possibles, on voit que le nombre de changements de signes reste constant.
4. Faire un tableau de signes : lorsque P s'annule, sa dérivée reste de signe constant. Dans tous les cas (P croissant ou décroissant), on perd un changement de signe car dans le reste du tableau le nombre de changements de signe reste constant (question 2).
5. C'est clair avec ce qui précède.
6. On part de l'intervalle $[-R, R]$ (Exercice 1), puis on fait une dichotomie jusqu'à obtenir des intervalles de la longueur spécifiée et contenant exactement une racine de P chacun. Nous implémenterons cet algorithme en Maple dans une séance ultérieure.
7. Alors $p_s = \mathrm{pgcd}(P, P')$ n'est pas une constante. On divise donc chaque p_j par p_s, ce qui ramène au cas initial.

Exercice 3 -

1. $\Sigma(z) = 0$ si et seulement s'il existe une permutation $\tau \in \mathcal{S}_d$ telle que $(z_{\tau(1)}, \ldots, z_{\tau(d)}) = \xi$. Puisque les racines de P sont distinctes, leur déterminant de Vandermonde est non nul, donc la différentielle de Σ en ξ est inversible. On peut donc appliquer l'algorithme de Newton-Raphson $z \mapsto z - \Sigma'(z)^{-1} \cdot \Sigma(z)$. Pour un choix convenable de la condition initiale, il converge globalement simultanément vers toutes les racines en même temps.
2. Soit l'application $\mathrm{c}\colon \mathbb{C}[X]_{d-1} \to \mathbb{C}^d$, $Q = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i \mapsto (a_{d-1}, \ldots, a_0)$. Alors $\Sigma = \mathrm{c} \circ F$ (attention au sens : σ_i est le coefficient devant X^{d-i}).
   Avec cette présentation, le calcul de la jacobienne de Σ se ramène à l'étude de celle de F, qui est plus simple. Pour la méthode de Newton-Raphson, on doit calculer $F'(z)^{-1} \cdot F(z) =: u$. Comme $F'(z)$ est inversible au voisinage de ξ, cela revient à résoudre $F'(z) \cdot u = F(z)$.

3. $F'(z) \cdot u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial z_i} F(z) \cdot u_i$. Posons la base de Lagrange associée aux z_i :

$$\mathbf{e}_{z_i} := \frac{\prod_{j \neq i}(X - z_j)}{\prod_{j \neq i}(z_i - z_j)}.$$

Alors :

$$\frac{\partial}{\partial z_i} F(z) = \frac{\partial}{\partial z_i} \prod_{i=1}^{d}(X - z_i) = -\prod_{j \neq i}(X - z_j) = -\left(\prod_{j \neq i}(z_i - z_j)\right) \mathbf{e}_{z_i},$$

et $F(z) = \sum_{i=1}^{d} F(z)(z_i)\mathbf{e}_{z_i} = -\sum_{i=1}^{d} P(z_i)\mathbf{e}_{z_i}$, donc l'unique solution u est donnée par :

$$u_i = \frac{P(z_i)}{\prod_{j \neq i}(z_i - z_j)}.$$

4. Les itérations de Newton-Raphson sont ainsi optimisées en :

$$z = (z_1, \ldots, z_d) \mapsto \left(z_1 - \frac{P(z_1)}{\prod_{j \neq 1}(z_1 - z_j)}, \ldots, z_d - \frac{P(z_d)}{\prod_{j \neq d}(z_d - z_j)}\right).$$

Cela converge à condition de commencer les itérations dans un voisinage des racines.