Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Année 2007-2008

Exercices sur les séries de fonctions

1. La fonction ζ de Riemann [G, Ch1, L, C, QZ]

On note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ et $\alpha(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$.

1.1. Montrer que ζ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

1.2. Montrer que α est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

1.3. Donner la limite de $\zeta(s)$ quand $s \to +\infty$ et un équivalent de $\zeta(s)$ quand $s \to 1^+$.

1.4. On note $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt$ définie pour $s > 0$. Montrer que pour $s > 1$, on a l'égalité $\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$.

1.5. Montrer que ζ définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $\Re(s) > 1$.

1.6.(*) Montrer que pour $\Re(s) > 1$, on a $\zeta(s) = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - p_n^{-s}}$, où p_n est la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant.

1.7.(*) En déduire que ζ ne s'annule pas sur le demi-plan $\Re(s) > 1$.

1.8.(*) En déduire que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

Remarque : ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

2. Etude d'une série de Dirichlet [L]

On note $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

2.1. Montrer que f converge uniformément sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, où $0 < \alpha < \pi$.

2.2. Qu'en déduit-on pour l'ensemble de définition et la continuité de f sur $[0, 2\pi]$?

2.3. Y a-t-il convergence uniforme de f sur $[0, 2\pi]$?

3. Théorème de Borel [C]

On cherche à montrer le théorème suivant : soit (a_n) une suite de réels. Il existe une infinité de fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f(0) = a_0,\ f'(0) = a_1, \cdots, f^{(n)}(0) = a_n, \cdots$

3. 1. Trouver une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non identiquement nulle telle que $\varphi(0) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)}(0) = 0$.

3.2. En utilisant la question précédente, trouver une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout x, on ait $0 \leq g(x) \leq 1$, que $g(x) = 0$ pour $|x| \geq 1$ et $g(x) = 1$ pour $|x| \leq \frac{1}{2}$.

On pose maintenant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!} g\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)$ avec $\lambda_n = 1$ si $|a_n| \leq 1$ et $\lambda_n = \frac{1}{|a_n|}$ si $|a_n| > 1$.

3.3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3.4. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et préciser ses dérivées successives.

3.5. En déduire le théorème énoncé.

4. Fonction $\mathcal{P}$ de Weierstrass [Ca, Ch2]

Soit ω_1 et ω_2 deux nombres complexes non-nuls tels que $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$. On appelle $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ le "réseau des périodes". On dit qu'une fonction f est elliptique pour le réseau Λ si pour tout $z \in \mathbb{C}$ où f est définie, $f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$.

On note $G_k = \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^k}$ et $\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$.

4.1. Montrer que G_k converge absolument pour $k \geq 3$.

4.2. Montrer que $\mathcal{P}$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

4.3. Montrer que $\mathcal{P}$ est paire, préciser ses pôles et leur ordre.

4.4. Calculer $\mathcal{P}'$. Montrer qu'elle est impaire et elliptique pour le réseau Λ.

4.5. En déduire que $\mathcal{P}$ est elliptique pour le réseau Λ.

4.6.(*) Donner un développement limité de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$ au voisinage de 0. En déduire que la fonction elliptique $g(z) = \mathcal{P}'(z)^2 - 4\mathcal{P}(z)^3 + 60G_4\mathcal{P}(z) + 140G_6$ est définie en 0 et nulle en ce point.

4.7.(*) En déduire que la fonction $\mathcal{P}$ vérifie l'équation $\mathcal{P}'(z)^2 = 4\mathcal{P}(z)^3 - 60G_4\mathcal{P}(z) - 140G_6$.

5. Indications

Exercice 1 :

1.2. Utiliser le critère des séries alternées.

1.3. Utiliser une comparaison séries-intégrales.

1.4. Utiliser le théorème de Beppo-Levi ou son corollaire pour les séries.

1.5. Utiliser le théorème de Weierstrass.

1.6. Utiliser le développement de $\frac{1}{1-x}$ en série entière.

1.8. Raisonner par l'absurde et contredire la question 1.3.

Exercice 2 :

2.1. Utiliser une transformation d'Abel et le critère de Cauchy uniforme.

2.3. En notant $S_k(x)$ les sommes partielles, étudier $S_k\left(\frac{1}{k}\right)$.

Exercice 3 :

3.1. Montrer que la fonction $\varphi(x) = e^{-1/x^2}$ convient.

3.2. Primitiver un produit de translations de φ.

3.4. Utiliser la formule de Leibniz.

Exercice 4 :

4.1. Utiliser la norme $|z| = \max(|z_1|, |z_2|)$, où $z = z_1\omega_1 + z_2\omega_2$.

4.2. Montrer que la série converge uniformément sur $B(0,R)$ pour $|\omega| > 2R$ en utilisant la question 4.1.

4.6. Ecrire les développements demandés en fonction des G_k.

4.7. Utiliser le théorème de Liouville

6. Quelques références

[CA] Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann.

[C] Combes, *Suites et séries*, PUF.

[CH1] Chambert-Loir, Fermigier et Maillot, *Analyse 1, exercices*, Dunod.

[CH2] Chambert-Loir et Fermigier, *Analyse 2, exercices*, Dunod.

[G] Gourdon, *Les maths en tête. Analyse*, Ellipses.

[L] Leichtnam, *Exercices corrigés de mathématiques posés à l'oral des concours de Polytechnique et des ENS. Tome Analyse*, Ellipses.
[QZ] Queffélec et Zuily, *Analyse pour l'agrégation*, Dunod.