Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
TD, Année 2007-2008
Formules de Taylor.

Exercice 1 (Formules de Taylor)

1) Taylor avec Reste Intégral : Soit $f \in C^{n+1}([a,b], \text{evn})$, alors

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

(Poser $g(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k$ et dériver.)

De cette formule, on peut en déduire Taylor-Lagrange et Taylor-Young pour des fonctions de classe C^{n+1}. Mais pour ces deux résultats, on peut affaiblir les hypothèses.

2) Inégalité des accroissements finis : Soit $g, k : [a,b] \to \text{evn}, \mathbb{R}$ dérivables sur $]a,b[$, continues sur $[a,b]$ et telles que pour tout $t \in]a,b[$, $\|g'(t)\| \leq k'(t)$, alors $\|g(b) - g(a)\| \leq k(b) - k(a)$.
(Poser $A = \{x \in [a,b]\,;\, \|g(x) - g(a)\| \leq k(x) - k(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon\}$, appeler c sa borne sup et si $c < b$, montrer que l'on peut trouver h assez petit tel que $c + h \in A$.)

3) Taylor-Lagrange : Soit $f \in C^n([a,b], \text{evn})$, $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$ telle que $\|f^{(n+1)}(t)\| \leq M$ pour tout $t \in]a,b[$, alors

$$\|f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\| \leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(Poser $g(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k$, majorer $\|g'(x)\|$ et appliquer l'inégalité des accroissements finis.)

4) Taylor-Young : Soit f définie sur un voisinage de a et n fois dérivable en a, alors

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

(On procède par récurrence. Pour $n-1 \to n$, dériver $R_n(f)(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, voir le lien avec $R_{n-1}(f')$ et appliquer l'inégalité des accroissements finis.)

Ceci traite le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans un evn. Pour les fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$, on a le raffinement suivant :

5) Taylor-Lagrange avec but réel : Soit $f \in C^n([a,b], \mathbb{R})$, $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

(Poser $\varphi(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - A(b-x)^{n+1}/(n+1)$ avec A tel que $\varphi(a) = 0$. Calculer φ' et appliquer Rolle.)

Cas des fonctions à plusieurs variables :

6) Par exemple pour les fonctions $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec U un ouvert, en posant $u(t) = f(X + tH)$, on peut en déduire des formules de Taylor avec reste intégral, Lagrange, Young. Le faire pour le Lagrange avec but réel pour f de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

(Bibliographie : Pommellet, Gourdon)

Exercice 2 (Inégalités, Courbes et Surfaces)

1) Montrer que $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ pour tout $x \geq 0$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré plan de classe C^∞. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que selon les parités des plus petits entiers $p < q$ tels que $(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ soit libre, on obtient un point ordinaire, d'inflexion, de rebroussement de première ou seconde espèce.

3) En utilisant les notations de Monge, par exemple en 0, selon le signe de $rs - t^2$, étudier $f(x,y) - (px + qy)$ et en déduire la position d'une surface par rapport à son plan tangent.

(Bibliographie : Gourdon, Ramis, Précis)

Exercice 3 (Application sur les fonctions)

1) Soit $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ telle que f et $f^{(n+1)}$ sont bornées, alors $f^{(k)}$ est bornée pour tout $k = 0, \cdots, n+1$.

2) Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $f, f'' \to 0$ en $+\infty$, alors $f' \to 0$ en $+\infty$.

3) Soit f bornée, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' \to 0$ en $+\infty$, alors $f' \to 0$ en $+\infty$.

4) Soit $f \in C^1([a, +\infty[)$ telle que $\int_a^{+\infty} f'$ est absolument convergente. Alors $\sum_{k \geq a} f(k)$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} f$ converge.

5) Si la série de Taylor d'une fonction converge en tout point avec un rayon de convergence > 0, alors il existe un sous-ensemble où cette fonction est analytique.

6) Soit f bornée, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que f'' est bornée sur $\mathbb{R}$. On pose $M_i = \sup_{\mathbb{R}} |f^{(i)}(x)|$. Alors $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

7) Soit $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle ordre d'un zéro a le plus petit entier (ou $+\infty$) p tel que $f^{(p)}(a) \neq 0$. Montrer qu'un zéro d'ordre fini est isolé et que s'il existe une infinité de zéro dans un compact, alors au moins l'un de ces zéros est d'ordre infini.

8) Soit $q \in C^+(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $\int_0^{+\infty} t|q(t)|\, dt$ converge. Soit y solution de $y'' + q(t)y = 0$. Montrer que $y'(t)$ a une limite en $+\infty$.

(Référence : Boas, Gourdon, Pommellet)

Remarque : Deux développements à venir font intervenir de façon cruciale les formules de Taylor en analyse numérique : Différences finis pour problème aux limites, et Intégration numérique. (Mais aussi équations différentielles numériques (Euler, CNS pour ordre p,...), vitesse de convergence des suites, méthode de Newton pour polynômes, ...) La formule de Taylor sert aussi pour les développements limités (et toutes ses conséquences), pour les développement en série entières, pour le Théorème de Bernstein pour les Séries Entières, pour la Méthode de Laplace, pour le Théorème de Borel, pour le principe du maximum (lié aux extremums), ...