

## Problème des moindres carrés, méthode QR.

### 1. DÉCOMPOSITION QR D'UNE MATRICE

EXERCICE 1 [S,C p. 93-94, LT p. 284] :

1.1. Soit  $A \in GL_n(\mathbb{C})$ . Grâce à la décomposition de Choleski, montrer qu'il existe  $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ , unitaire et  $R \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ , triangulaire supérieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs telles que  $A = QR$ . Montrer que cette décomposition est unique.

1.2. Donner une manière effective de calculer  $Q$  et  $R$ .

On peut généraliser le résultat précédent ainsi : Soit  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  avec  $m \geq n$ . Il existe  $Q \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{C})$ , unitaire (c'est-à-dire telle que  $Q^*Q = I_n$ ) et  $R \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , triangulaire supérieure telles que  $A = QR$ . C'est l'objet de l'exercice suivant.

### 2. MATRICES DE HOUSEHOLDER

**Définition 1.** On appelle matrice de Householder une matrice de la forme  $H(v) = I_m - 2 \frac{vv^*}{v^*v}$ , où  $v$  est un vecteur de  $\mathbb{C}^m$ ,  $v \neq 0$ . On pose également  $H(0) = I_m$ .

*Remarque :* La matrice de Householder  $H(v)$  représente la symétrie par rapport au plan  $\mathcal{P}$  passant par l'origine et perpendiculaire au vecteur  $v$ .

EXERCICE 2 [C p. 90-93, LT p. 278-283] :

2.1. Montrer qu'une matrice de Householder est symétrique et unitaire.

2.2. Soit  $a \in \mathbb{C}^m$  tel que  $\sum_{i=2}^m |a_i| > 0$ . Montrer qu'il existe une matrice de Householder telle que les  $m-1$  dernières composantes de  $Ha$  soient nulles. Montrer que l'on peut également choisir la première composante de  $Ha$  positive.

2.3. Que se passe-t-il si  $\sum_{i=2}^m |a_i| = 0$  ?

2.4. Utiliser les matrices de Householder pour trouver une autre méthode de calcul de la décomposition QR d'une matrice  $A$ .

2.5. Calculer  $v^*v$  avec  $v = a \pm \|a\|_2 e_1$  et déterminer, selon le signe de  $a_1$ , lequel des deux vecteurs on choisira de préférence.

### 3. PROBLÈMES DES MOINDRES CARRÉS

On considère le *problème des moindres carrés* : soit  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  avec  $m \geq n$  et  $b \in \mathbb{C}^m$ , on cherche  $x \in \mathbb{C}^n$  qui minimise  $J(x) = \|Ax - b\|_2^2$ .

EXERCICE 3 [LT p. 276 et p.298 et p.273-275] :

3.1. Montrer que  $x$  est solution du problème des moindres carrés ssi  $A^*Ax = A^*b$  (cette équation est appelée *équation normale*). Montrer que ce système admet toujours au moins une solution et qu'elle est unique si  $\text{rang}(A)=n$ .

3.2. Utiliser la décomposition QR de la matrice  $A$  pour résoudre ce problème dans le cas où  $\text{rang}(A)=n$ .

3.3. Ecrire l'approximation de  $m$  points par un polynôme de degré  $n-1$  (i.e. pour  $n=2$  la régression linéaire) sous la forme d'un problème de moindres carrés.

### 4. INDICATIONS

EXERCICE 1

1.1.  $R$  est la matrice obtenue par la décomposition de Choleski de  $A^*A$  et il suffit de vérifier que  $Q = AR^{-1}$  est bien unitaire. Pour l'unicité, utiliser qu'une matrice unitaire, triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs ne peut avoir que 1 comme valeur propre.

1.2. Utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué aux colonnes de la matrice.

EXERCICE 2

2.2. Plus précisément, montrer que  $H(a \pm \|a\|_2 e_1)a = \mp \|a\|_2 e_1$ .

2.3.  $H(0)$  convient. Pour avoir la première composante de  $H(a)$  positive, distinguer les cas  $a_1 \in \mathbb{R}^+$ ,  $a_1 \in \mathbb{R}_*^-$  et  $a_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

2.4. Utiliser  $n - 1$  fois le résultat de la question 2.2.

2.5.  $v^*v = 2\|a\|_2(\|a\|_2 \pm a_1)$

### EXERCICE 3

3.1. Calculer le gradient de  $J$ . Si  $\bar{x}$  est solution de l'équation normale, montrer qu'il minimise  $E(x) = (A^*A(x - \bar{x}), x - \bar{x})$  et donc qu'il minimise  $J$ . Montrer que  $A^*b \in \text{Ker}(A^*A)^\perp$ .

### 5. RÉFÉRENCES

[C] Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod.

[LT] Lascaux-Théodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 1.*, Dunod.

[S] Serre, *Les matrices*, Dunod.