Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Année 2007-2008

TP Scilab : intégration numérique

1. Méthodes de Newton-Cotes

1.1. Programmer la méthode des rectangles à gauche, du point milieu, des trapèzes et de Simpson sur n intervalles de même longueur h.

Rappel : la formule de Simpson sur $[a,b]$ *s'écrit* $\widetilde{I}(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$.

1.2. Vérifier graphiquement que les erreurs de ces méthodes sont proportionnelles respectivement à h, h^2, h^2, h^4. On pourra utiliser comme test $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

1.3. Que se passe-t-il pour l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{t}\,dt$? Pourquoi ?

1.4. Etudier la convergence de la méthode des rectangles pour les fonctions suivantes sur $[0,1]$: $f_i(x) = x^i(1-x)^i \cos x$ $(i = 2,3,4)$ puis $f_5(x) = \frac{\sin^2 2\pi x}{1+\sin^2 2\pi x}$. On remarquera que ces fonctions, une fois 1-périodisées, sont respectivement $\mathcal{C}^{i-1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

2. Méthodes de Gauss

Une méthode de Gauss est de la forme $\int_{-1}^1 f(t)\omega(t)dt \simeq \sum_{i=0}^{l} \lambda_i f(x_i)$ et est d'ordre $2l+1$.

2.1. Programmer les méthodes de Gauss-Legendre suivantes ($\omega = 1$ sur $[-1,1]$) :

- $l = 1$, $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 1$;
- $l = 2$, $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ et $\lambda_0 = \frac{5}{9}$, $\lambda_1 = \frac{8}{9}$, $\lambda_2 = \frac{5}{9}$.

Appliquer ces méthodes au calcul des intégrales $\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $\int_0^1 \sqrt{t}\,dt$. Comparer avec les méthodes de Newton-Cotes avec le même nombre de points.

2.2. Programmer les méthodes de Gauss-Tchebychev ($\omega = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$) : quel que soit l, $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2l+2}\pi\right)$ et $\lambda_i = \frac{\pi}{l+1}$, $0 \le i \le l$.

Appliquer ces méthodes au calcul de $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt$, puis de $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Conclure.

3. Calculs d'intégrales généralisées

3.1. Estimer $\int_A^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ en fonction de $A \ge 1$. En déduire un programme qui permet de calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ avec une précision ε fixée.

3.2. Montrer que la formule de Gauss pour $l = 0$ associée au poids $\omega(x) = x^{-\beta}$ pour $0 < \beta < 1$ sur l'intervalle $[0,1]$ vaut $\int_0^1 f(t)t^{-\beta}dt \simeq \frac{1}{1-\beta} f\left(\frac{1-\beta}{2-\beta}\right)$.

Calculer l'intégrale $\int_0^{10^{-2}} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$ en utilisant la méthode du point milieu, puis la méthode de Gauss calculée ci-dessus. Comparer.

4. Références

Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, PUG.
Schatzman, *Analyse numérique*, Dunod.
Bastien-Martin, *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*, Dunod.
Vial, *Calcul numérique d'un temps de descente*, textes pour l'oral de modélisation,
`http ://www.bretagne.ens-cachan.fr/math/people/gregory.vial/enseignement.php`.