Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Année 2007-2008

TP Scilab : problème des moindres carrés et méthode QR

1. Décomposition QR de la matrice

1.1. Programmer la décomposition QR d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.

1.2. Que pensez-vous de l'algorithme de Gram-Schmidt modifié ci-dessous ? Donne-t-il le même résultat ? Quel est son intêret ?

```
Q=A;R=zeros(A);
for k=1:(n-1)
  R(k,k)=norm(Q(:,k));
  if  R(k,k)==0 then  abort; end;
  Q(:,k)=Q(:,k)/R(k,k);
  R(k,k+1:n)=Q(:,k)'*Q(:,k+1:n);
  Q(:,k+1:n)=Q(:,k+1:n)-Q(:,k)*R(k,k+1:n);
end
R(n,n)=norm(Q(:,n));
Q(:,n)=Q(:,n)/R(n,n);
```

1.3. Programmer la décomposition QR d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ à l'aide des matrices de Householder.

1.4. Comparer les trois méthodes précédentes (vérifier en particulier l'orthogonalité de la matrice Q obtenue) pour la matrice de Hilbert définie par $H_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$, $1 \leq i, j \leq n$ pour $n = 10$.

2. Problème des moindres carrés

Soient n points (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$. Faire un programme qui trouve la droite $y = ax + b$ minimisant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i - (ax_i + b)|^2$. Prendre un exemple et tracer sur un graphique les points et la droite.

3. Références

Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod.
Lascaux-Théodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 1.*, Dunod.