Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Année 2007-2008

# TP Scilab : Equations différentielles ordinaires

*Rappel : pour l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$, les différentes méthodes s'écrivent :*

| | |
|---|---|
| *Méthode d'Euler explicite* | $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$. |
| *Méthode d'Euler implicite* | $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$. |
| *Méthode de Crank-Nicolson* | $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right)$. |
| *Méthode du point milieu* | $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n))$. |
| *Méthode de Heun* | $p_{n,1} = f(t_n, y_n)\,,\ p_{n,2} = f(t_n + h, y_n + hp_{n,1})\,,$ $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(p_{n,1} + p_{n,2})$. |
| *Méthode de Runge-Kutta 4* | $p_{n,1} = f(t_n, y_n)\,,\ p_{n,2} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}p_{n,1}\right),$ $p_{n,3} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}p_{n,2}\right),\ p_{n,4} = f(t_n + h, y_n + hp_{n,3})\,,$ $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(p_{n,1} + 2p_{n,2} + 2p_{n,3} + p_{n,4})$. |

## 1. Ordre des méthodes classiques

1.1. Programmer les méthodes d'Euler explicite, d'Euler implicite, du point milieu et de Runge-Kutta 4 pour l'équation différentielle $y'(t) = -y(t)$ jusqu'au temps $T = 1$ avec comme condition initiale $y(0) = 1$.

1.2. Faire varier le pas de temps $h$ et tracer l'erreur entre solution exacte et solution approchée en fonction de $h$. En déduire graphiquement l'ordre des quatre méthodes étudiées.

## 2. Problèmes raides et méthodes implicites

2.1. On considère l'équation $\begin{cases} y' = -150y + 30, & t \in [0,1], \\ y(0) = \frac{1}{5}, \end{cases}$ dont la solution exacte est $y(t) = \frac{1}{5}$.
Avec une donnée initiale $y(0) = \frac{1}{5} + \varepsilon$, la solution exacte devient $y(t) = \frac{1}{5} + \varepsilon e^{-150t}$.

Tester ce problème avec la méthode d'Euler explicite et les paramètres $h = \frac{1}{50}$, $\varepsilon = 10^{-10}$ et $T = 1$. Que se passe-t-il pour la méthode d'Euler implicite et les mêmes paramètres ? Que se passe-t-il pour la méthode d'Euler explicite et $h = \frac{1}{100}$ ?

2.2. On considère le système $\begin{cases} x' = & -k_1x + k_3yz \\ y' = & k_1x - k_3yz - k_2y^2 \\ z' = & k_2y^2 \end{cases}$ avec $k_1 = 0.04,\ k_2 = 3.10^7,\ k_3 = 10^4$
$x(0) = 1$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 0$. On peut montrer que $x$, $y$ et $z$ sont des fonctions positives, que $x$ décroît vers 0, que $z$ croît vers 1 et que $y$ croît puis décroît vers 0.

Le tester jusqu'à $T = 0.3$ avec la méthode d'Euler explicite et $h = 10^{-3}$, $h = 10^{-4}$.

## 3. Méthodes symplectiques et systèmes hamiltoniens

3.1. On considère le système $\begin{cases} x' = -y, & t \in [0, 4\pi], \\ y' = x, \end{cases}$ avec $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$. La solution exacte est $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ et la quantité $H(x,y) = x^2 + y^2$ appelée hamiltonien du système est conservée au cours du temps.

Tester les différentes méthodes avec $h = 0.1$ pour ce système.

## 4. Références


Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, PUG.
Hairer - Wanner, *Solving ordinary differential equations*, Springer-Verlag.
Vial, *Cinétique de l'oxydation du sulfite de cuivre*, textes pour l'oral de modélisation,
`http ://www.bretagne.ens-cachan.fr/math/people/gregory.vial/enseignement.php`.