**Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,**

*TD, Année 2007-2008*

**Espaces complets.**

### Exercice 1 (Propriétés ultra-basiques)

Montrer les propriétés suivantes :

1) Une suite de Cauchy est bornée.

2) Une suite de Cauchy avec un point d'accumulation $a$ est convergente (vers $a$).

3) Tout espace métrique compact est complet.

4) Tout e.v.n. de dimension fini est complet.

5) Un complet d'un espace métrique est fermé.

6) Un s.e.v. de dimension finie d'un e.v.n. est fermé.

7) Si $(E_1, d_1)$ et $(E_2, d_2)$ sont complet, alors $(E_1 \times E_2, d)$ est complet avec $d =$ (au lecteur de compléter).

### Exercice 2 (Notion métrique)

En étudiant $d(x, y) = |\mathrm{Arctan} x - \mathrm{Arctan} y|$ sur $\mathbb{R}$, montrer que la notion d'espace complet est métrique et non topologique.

### Exercice 3 (Exemples du cours)

1) Soit $X$ un ensemble. On pose $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ l'e.v. des fonctions bornées de $X$ dans $\mathbb{C}$. On le muni de $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \,;\, x \in X\}$. Montrer que cela en fait un espace complet.

2) Montrer que $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ (e.v. des suites complexes qui tendent vers 0) muni de la norme infinie est complet.

3) Montrer que $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ muni de $\|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2 = \sqrt{\sum_0^{+\infty} |u_k|^2}$ est complet.

4) Montrer que $L_c(E, F)$, avec $E$ e.v.n. et $F$ un Banach, muni de la norme d'opérateur classique est complet.

### Exercice 4 (Quelques propriétés des espaces complets)

1) Soit $(E, d)$ un espace complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides telle que $\mathrm{diam}(F_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Alors il existe $x \in E$ telle que $\cap F_n = \{x\}$.

2) Soit $E$ un e.v.n. Montrer que $E$ est complet si et seulement si pour tout $\sum \|u_n\|$ convergente, on a $\sum u_n$ converge.

3) Soit $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ dérivable avec une dérivée bornée, alors $f$ se prolonge continuement sur $[a, b]$.

### Exercice 5 (Distance qui rend complet les fonctions $C^\infty$)

Pour $f, g \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$, on pose $d(f, g) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty}{1 + \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty}$.

1) Montrer que $d$ est bien une distance sur $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$.

2) Montrer que $(C^\infty([a, b], \mathbb{R}), d)$ est complet.

Bibliographie : Schwartz (Analyse 1), Gourdon, Pommellet, Leichtnam-Schauer (ex 5)