Université de Nice-Sophia Antipolis 2007/2008
Préparation à l'agrégation externe
Département de mathématiques
F.Robert

TD: formes linéaires et hyperplans

Définition: Soit E un $k-$espace vectoriel. Soit H un sous-espace vectoriel strict de E. On dit que H est un hyperplan de E si pour tout F sous-ev de E tel que $H \subset F \subset E$, on a $F = H$ ou $F = E$.

Dans toute cette séance, K est un corps et E est un espace vectoriel sur K.

Exercice 1: Soit H un sous-ev de E. Montrez que H est un hyperplan ssi H admet un supplémentaire de dimension 1.

Exercice 2: Soit H un sous-ev de E. On suppose que E est de dimension finie. Montrez que H est un hyperplan ssi $\dim_K(H) = \dim_K(E) - 1$.

Exercice 3: Soit H un ss-ev de E. Montrez que H est un hyperplan ssi il existe $\varphi \in E^\star \setminus \{0\}$ tel que $H = \text{ Ker } \varphi$. Comment obtient-on tous les $\psi \in E^\star$ tels que $H = \text{ Ker } \psi$ à partir de φ?

Exercice 4: Soit F un sous-ev de E avec E de dimension finie. Montrez que

$$F = \bigcap_{F \subset H, \text{ hyperplan}} H.$$

Indication: pour $(\supset)$, on pourra montrer que si $x \notin F$, il existe une forme linéaire nulle sur F qui n'est pas nulle en x.

Exercice 5: On suppose que K est fini et que E est de dimension finie sur K. Soit une famille $(H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'hyperplans de E. On suppose que

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda = E.$$

Montrez que Λ possède au moins $|K| + 1$ éléments.

Exercice 6: Soit E un ev de dimension finie. Soient $\varphi_1, ..., \varphi_r \in E^\star$.

a. On suppose $\{\varphi_1, ..., \varphi_r\}$ libre. En complétant cette famille libre en une base de $E^\star$ et en prenant la base de E associée (par dualité), montrez que

$$\dim_K \bigcap_{i=1}^{r} \text{ Ker } \varphi_i = n - r.$$

b. Montrez que

$$\{\varphi_1, ..., \varphi_r\} \text{ libre } \Leftrightarrow \dim_K \bigcap_{i=1}^{r} \text{ Ker } \varphi_i = n - r.$$

Exercice 7: On suppose que E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie. Soit H un hyperplan de E et soit $\varphi \in E^\star$ telle que $H = \text{ Ker } \varphi$. Soit $x \in E$.

a. En utilisant que $\varphi(x) = \varphi(x - h)$ pour tout $h \in H$, montrez que

$$d(x, H) \geq \frac{|\varphi(x)|}{|||\varphi|||}.$$

b. Soit $u \in E \setminus H$. En écrivant $x = h + \lambda u$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrez que

$$d(x, H) \leq \frac{|\varphi(x)|}{|||\varphi|||}.$$

c. Concluez.

Exercice 8: Soit E un evn et soit $\varphi \in E^\star$. Montrez que φ est continue ssi Ker φ est fermé.

Exercice 9: Soit H un hyperplan de $Gl_n(K)$, $n \geq 1$. On cherche à montrer que $H \cap Gl_n(K) \neq \emptyset$. Soit φ une forme linéaire sur $M_n(K)$ telle que $H =$ Ker φ.

a. Concluez si $\varphi(I_n) = 0$.

b. Concluez si $\varphi(I_n) \neq 0$ et il existe $i \neq j$ tels que $\varphi(E_{ij}) \neq 0$.

c. Dans les cas restant, déterminez

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et concluez.