Université de Nice-Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de Mathématiques
Année 2006-2007

TD 8: Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites

Exercice 1. En quels points on peut appliquer le théorème d'inversion locale pour les fonctions suivantes?

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x^2-y^3) \end{array} \quad \text{et} \quad f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, xy-\frac{y^3}{3}) \end{array}$$

Exercice 2: Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^4 - 5x^3y^2 + 6y^3 + 18 = 0\}$. Montrez qu'il existe I, J intervalles ouverts tels que $2 \in I$, $1 \in J$, il existe $\varphi \in C^\infty(I,J)$ tels que pour tout $(x,y) \in I \times J$, $(x,y) \in \mathcal{D} \cap (I \times J)$ ssi $y = \varphi(x)$. Déterminez $\varphi'(2)$ et $\varphi''(2)$.

Exercice 3: Soit $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, y > 0$ et $x + y^2 + zx + \ln y = 1$ et $z - xy + xyz = 0\}$. Montrez que pour $(x,y,z) \in D$ voisin de $(0,1,0)$, on peut exprimer localement y et z en fonction de x. Déterminez les différentielles de ces deux fonctions en 0.

Exercice 4. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1. On suppose qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que $|h'(x)| \leq k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x-h(y), y-h(x)) \end{array}$$

a. Montrez que φ est injective.
b. Montrez que φ est surjective. (Utilisez le théorème du point fixe).
c. Montrez que $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un C^1-difféomorphisme.

Exercice 5. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné non vide et soit $f \in C^0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$. On suppose que $f_{|U} \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ et que $df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme pour tout $x \in U$. On suppose que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \partial U$. On pose

$$Z(f) = \{x \in U / \, f(x) = 0\}.$$

On suppose que $Z(f) \neq \emptyset$.
a. Soit $x \in Z(f)$. Montrez qu'il existe $\delta_x > 0$ tel que $B(x, \delta_x) \cap Z(f) = \{x\}$.
b. Montrez que $Z(f)$ est fini.

Exercice 6: Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y| \text{ et } |f'(x) - f'(y)| \leq C|x-y|$$

pour tous $x.y \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe $\lambda_0 > 0$, il existe une famille de fonctions $u_\lambda \in C^2([0,1])$ pour $\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} u''_\lambda(t) = \lambda f(u_\lambda(t)) & \text{pour tout } t \in [0,1] \\ u_\lambda(0) = u_\lambda(1) = 0 & \end{array} \right\}$$

Pouvait-on utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz pour prouver ce résults?

Exercice 7. On munit $C^2([0,1])$ de la norme

$$\|u\|_{C^2} = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \|u''\|_\infty$$

et $C^0([0,1])$ de la norme usuelle $|\cdot\|_\infty$. Soit $E = \{u \in C^2([0,1]) / \, u(0) = u(1) = 0\}$ muni de $\|\cdot\|_{C^2}$. Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} T: & E & \to & C^0([0,1]) \\ & u & \mapsto & u'' - u^2 \end{array}$$

Montrez que T est C^1 et qu'on peut appliquer le théorème d'inversion locale en 0. En déduire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $f \in C^0([0,1])$ telle que $\|f\|_\infty < \epsilon$, alors il existe $u \in C^2([0,1])$ tel que $u''-u^2 = f$ et $u(0) = u(1) = 0$.

Exercice 8. On considère les variables (x, y, z) strictement positives reliées par les relations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x + e^{yz-2y} + \cos((x-1)\cdot y) = C \\ y - e^{x+z-3} + \ln y = D \end{array} \right\}$$

a. Cal;culez C et D sachant que $(1, 1, 2)$ est solution du système.

b. Montrez qu'au voisinage de $(1, 1, 2)$, si (x, y, z) est solution du système, on peut exprimer $y = \varphi(x)$ et $z = \psi(x)$ avec φ, ψ deux fonctions C^1 définies au voisiange de 1.

c. Déterminez un développement à l'ordre 2 de φ et ψ en 1.

Exercice 9: Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soit $A_0 \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice posssédant n valeurs propres distinctes.

a. Montrez que si A est voisin de A_0, alors les valeurs propres de A dépendent continuement de A.

On cherche maintenant à construire une base de vecteurs propres pour A dépendant continuement de A. Pour cela, on se donne $(V_1, ..., V_n)$ une base de vecteurs propres de A_0. On fixe $i \in \{1, ..., n\}$.

b. Montrez qu'on peut supposer que $(V_i)^1 = 1$ (il s'agit de la première coordonnée).

c. Montrez qu'il existe une fonction continue $V_i : U \to \mathbb{R}^n$, où U est un voisinage de A_0 telle que $V_i(A)$ est une valeur propre de A pour tout $A \in U$ et $V_i(A_0) = V_i$. (On pourra raisonner par l'absurde).

d. Montrez que pour tout A proche de A_0, il existe une base de vecteurs propres de A dépendant continuement de A.

Exercice 10: Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$. Montrez qu'il existe $A_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $A \in \mathcal{D} \setminus \{A_0\}$, il existe U ouvert de $\mathbb{R}^3$ tel que $A \in U$ et $\mathcal{D} \cap U$ est difféomorphe à un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.