Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Année 2007-2008
Topologie.

Exercice 1 (Définitions)

1) Rappeler comment est défini : une topologie, une distance, la topologie dans un espace métrique, une norme, un voisinage, l'adhérence (existence ?), l'intérieur (existence ?), la frontière, la topologie induite, un homéomorphisme, un produit fini d'espace métrique.

2) Montrer la lipschitziennité de la distance dans un espace métrique.

3) La notion de borné est-elle topologique ou métrique ?

4) Qu'est-ce qu'un espace séparé ? Montrer qu'un espace métrique est séparé. Exemple d'espace non séparé.

5) Quels sont les ouverts de $]a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$?

Exercice 2 (Boules ouvertes, fermées, ...)

Soit (E, d) un espace métrique. On note B_o et B_f les boules ouvertes et fermées. Montrer que l'adhérence de $B_o(a, r)$ est inclu dans $B_f(a, r)$. Egalité ? Montrer que la frontière de $B_o(a, r)$ est la sphère $S(a, r)$.

Exercice 3 (Distance à un ensemble)

Soit (E, d) un espace métrique.

1) Soit $A \subset E$. Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

2) Soient K, C deux compacts. Montrer qu'il existe $k \in K$, $c \in C$ tels que $d(K, C) = d(k, c)$.

3) Soient K un compact et F un fermé tels que $K \cap F = \emptyset$. Montrer que $d(K, F) > 0$.

4) Donner un exemple avec F et G fermés, $F \cap G = \emptyset$. et $d(F, G) = 0$.

5) Soit $E = \mathbb{R}^n$, F un fermé borné de E, $f : F \mapsto \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \in F, \|x\| \infty} f(x) = +\infty$. Alors il existe $x \in F$ tel que $f(x) = \inf_{y \in F} f(y)$.

Exercice 4 (Topologie de $A + B$)

Soit E un espace topologique.
1) Soit A un ouvert et B quelconque de E, alors $A + B$ est ouvert.

2) Soit A fermé et B compact de E, alors $A + B$ est fermé.

3) Donner un exemple où A et B sont fermés et $A + B$ non fermé.

Exercice 5 (Distance sur $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$)

On munit $C^0([a, b], \mathbb{R})$ de la norme $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Pour $f, g \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$, on pose $d(f, g) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|f^{(k)} - g^{(k)}\|}{1 + \|f^{(k)} - g^{(k)}\|} \frac{1}{2^k}$. Montrer que cela fournit une distance à $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$.

(Référence : Gourdon, Kirillov-Gvichian, Pommellet, Schwartz)