Mesure et intégration

$(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est une espace mesuré, pour $A \in \mathcal{T}$, χ_A est la fonction indicatrice de A qui est égale à 1 sur A et 0 ailleurs, la mesure de A sera notée : $\mu(A) = |A| = \int_\Omega \chi_A d\mu$.

1 Une mesure invariante sur la sphère

L'espace $\mathbb{R}^d$ est muni de la mesure de Lebesgue notée μ, du produit scalaire et de la norme euclidienne usuels $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$. La sphère unité et la boule unité de $\mathbb{R}^d$ sont notées $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d, \|x\| = 1\}$, $B^d = \{x \in \mathbb{R}^d, \|x\| \leq 1\}$. On définit une mesure λ sur la sphère de la manière suivante : pour toute partie mesurable $A \subset S^{d-1}$, on définit le cône engendré par A comme l'ensemble $C = \{t.x,\ t \in [0, 1],\ x \in A\}$ et $\lambda(A) = \dfrac{\mu(C)}{\mu(B^d)}$.

1. Montrez que λ est invariante par rotation, i.e. pour toute rotation vectorielle r de $\mathbb{R}^d$ et pour toute partie mesurable $A \subset S^{d-1}$ on a $\lambda(A) = \lambda(r(A))$.
2. Soient $d \geq 2$, $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi$, $a = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0, \cdots, 0)$, $b = (\cos\beta, \sin\beta, 0, \cdots, 0)$, $S(\alpha, \beta) = \{x \in S^{d-1}\ \ x_1 = \cos(\theta), x_2 = \sin(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$, et $0 \leq \gamma, 0 \leq \gamma'$, $\gamma + \gamma' \leq 2\pi$, montrez que $\lambda(S(0, \gamma + \gamma')) = \lambda(S(0, \gamma)) + \lambda(S(0, \gamma'))$. En déduire que la mesure du quartier de sphère $S(\alpha, \beta)$ est : $\lambda(S(\alpha, \beta)) = \dfrac{\beta - \alpha}{2\pi} = \dfrac{\text{Arcos} < a, b >}{2\pi}$.

2 Intégration

1. Soit $(A_n)_n \subset \mathcal{T}$. On note $\limsup A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k$, et A^∞ l'ensnemble des $x \in \Omega$ qui appartiennent à une infinité de A_n. Vérifier que $\limsup A_n = A^\infty$ et que $x \notin A^\infty$ si et seulement si x est dans aucun A_n à partir d'un certain rang.
2. Si $\sum_n \mu(A_n) < \infty$ montrez que $|\limsup A_n = 0|$.
3. Si $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$, montrez que $|\{x \in \Omega, |f(x| \geq a\}| \leq \dfrac{1}{a} \int_\Omega |f(x)| d\mu$.
4. Si $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$, montrez que $|\{x \in \Omega, |f(x| \geq a\}| \leq \dfrac{1}{a^2} \int_\Omega |f(x)|^2 d\mu$.
5. Si $(f_n)_n$ est une suite bornée dans $L^2(\Omega, \mathbb{R})$, montrer qu'il existe un ensemble négligeable $\mathcal{N}$ telle que : $x \notin \mathcal{N} \Rightarrow |f_n(x)| < n$ à partir d'un certain rang.
6. Le résultat précédent subsiste-t-il si $(f_n)_n$ est une suite seulement bornée dans $L^1(\Omega, \mathbb{R})$? On pourra considérer la suite f_n définie par :
   $f_n = n\chi_{[mh, mh+h]}$, où $n = 2^k + m$, $0 \leq m < 2^k$, $h = 2^{-k}$, pour $\Omega = [0, 1]$.

3 Fubini ou changement de variables

Etudier la convergence $\int_{[0,1]^d} \dfrac{dX}{\|X\|^\alpha}$ suivant les valeurs de $\alpha > 0$.