Conditionnements

Soit $\|.\|$ une norme de $I\!R^N$, $|||.|||$ sa norme subordonnée, et

$$cond(A) = |||A||| \times |||A^{-1}|||$$

pour $A \in GL_N(I\!R)$. Si $\|.\|$ est la norme euclidienne alors le conditionnement de A est noté $cond_2(A)$.

1 Conditionnement d'un système linéaire

1. Montrez que $cond(A) \geq 1$ et que $cond(\alpha A) = cond(A)$ pour tout scalaire $\alpha \neq 0$.
2. Si A est symétrique définie positive, vérifiez que $cond_2(A) = \dfrac{\lambda_N}{\lambda_1}$ où $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_N$ sont les valeurs propres de A.
3. Montrez que $cond_2(A) = 1$ si et seulement si A est proportionnelle à une matrice orthogonale.
4. Si $Ax = b$ et $Ay = c$, en notant $\Delta x = y - x$, $\Delta b = c - b$, montrer et interpréter le résultat suivant :

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

5. Faire de même, si $Ax = b$ et $By = b$, $\Delta x = y - x$, $\Delta A = B - A$:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|y\|} \leq cond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

2 Courant-Fisher

Soit A une matrice symétrique, $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_N$ les valeurs propres de A. On note, en utilisant le produit scalaire, pour $x \neq 0$ le coefficient de Rayleigh :

$$r(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}.$$

Démontrer les assertions suivantes en utilisant une base de vecteurs propres de A :

1. $\max\limits_{0\neq x} r(x) = \lambda_N$, $\min\limits_{0\neq x} r(x) = \lambda_1$,
2. $\min\limits_{\dim V=k} \max\limits_{0\neq x\in V} r(x) = \lambda_k$, $\max\limits_{\dim V=k} \min\limits_{0\neq x\in V} r(x) = \lambda_{N-k+1}$, pour $1 \leq k \leq N$.

3 Conditionnement de recherche de valeurs propres

Soit A une matrice diagonalisable et P une de ses matrices de passage : $P^{-1}AP = D$ avec D diagonale. On note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

1. Vérifiez que $\det(I + M) = 0$ si $|||M||| \geq 1$ où I désigne la matrice de l'identité.

2. Soit $B = A + \Delta A$ et $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$.
   Si $\mu \notin \mathrm{Sp}(A)$, vérifiez que $P^{-1}(B - \mu I)P = (D - \mu I)(I + (D - \mu I)^{-1}P^{-1}\Delta AP)$.
3. En déduire que

$$d(\mathrm{Sp}(A + \Delta A), \mathrm{Sp}(A)) = \max_{\mu \in \mathrm{Sp}(A+\Delta A)} \min_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\mu - \lambda| \leq cond(P)|||\Delta A|||.$$

4. Expliquer pourquoi le problème le conditionnement du problème de recherche des valeurs propres de A s'obtient en minimisant le conditionnement des matrices de passage de A, i.e. :

$$\inf_{P, P^{-1}AP = D} cond(P).$$

5. En déduire que la recherche des valeurs propres des matrices normales est un problème très bien conditionné.

Références :
Ciarlet : Introduction à l'analyse numérique matricielle ...
Lascaux & Théodor : Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur.
Schatzman : Analyse numérique