Université de Nice - Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de mathématiques
Semaine du 17 au 23 septembre 2007

On fixe pour toute la suite un corps commutatif k.

Exercice 1. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie, soit F un k-espace vectoriel et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrez que Im f est de dimension finie et que

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E.$$

Exercice 2. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrez l'égalité

$$\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

Exercice 3. Soient n un entier et $(E_0, \ldots, E_{n+1})$ une famille de k-espaces vectoriels ; pour tout i compris entre 0 et n on se donne une application linéaire f_i de E_i vers E_{i+1}. On suppose que E_0 et E_{n+1} sont nuls, et que pour tout i compris entre 1 et n le noyau de f_i est égal à l'image de f_{i-1}.

a) Que signifie cette dernière hypothèse en ce qui concerne f_1 et f_n ?

b) Montrez que $\sum\limits_i (-1)^i \dim E_i = 0$.

Exercice 4. Soient n , m et r trois entiers.

a) Montrez que toute matrice de $M_{n,m}(k)$ de rang r est équivalente à la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception des r premiers de la diagonale qui sont égaux à 1.

b) Montrez que deux matrices de $M_{n,m}(k)$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang, et que le rang des lignes d'une matrice est égal à celui des colonnes (pensez à la transposition !).

c) Montrez que le rang d'une matrice est la dimension maximale d'une sous-matrice carrée inversible que l'on peut en extraire.

Exercice 5. Soit L un corps contenant k et soit M une matrice, que l'on ne suppose pas *a priori* carrée, à coefficients dans k. Montrez que son rang ne change pas lorsqu'on la voit comme matrice à coefficients dans L.

Exercice 6. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E.

a) Montrez que $(\operatorname{Ker} f^n)_n$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E. Montrez qu'il existe un entier r tel que $\operatorname{Ker} f^r = \operatorname{Ker} f^{r+1}$. Soit r_0 le plus petit entier à posséder cette propriété. Montrez que la suite étudiée est constante à partir du rang r_0.

b) Montrez que $(\text{Im } f^n)_n$ est une suite décroissante de sous-espaces vectoriels de E. Montrez qu'il existe un entier s tel que $\text{Im } f^s = \text{Im } f^{s+1}$. Soit s_0 le plus petit entier à posséder cette propriété. Montrez que la suite étudiée est constante à partir du rang s_0.

c) Montrez que $r_0 = s_0$ et que E est somme directe de $\text{Im } f^{r_0}$ et $\text{Ker } f^{r_0}$.