

Université de Nice - Sophia Antipolis  
Préparation à l'agrégation de mathématiques  
Semaine du 8 au 14 octobre 2007

**Exercice 1.** Soit  $p$  un nombre premier et soit  $G$  un  $p$ -groupe (*i.e.* un groupe fini dont le cardinal est une puissance de  $p$ ) non réduit à l'élément neutre. Montrez que le centre de  $G$  n'est pas réduit à l'élément neutre; si le cardinal de  $G$  est égal à  $p$  ou  $p^2$ , montrez que  $G$  est abélien; donnez un exemple de groupe de cardinal  $p^3$  non abélien.

**Exercice 2.** Soit  $p$  un nombre premier, soit  $E$  un  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel non nul et soit  $G$  un  $p$ -groupe fini opérant sur  $E$  par transformations  $\mathbb{F}_p$ -linéaires

a) Montrez qu'il existe un vecteur  $x$  non nul de  $E$  tel que  $g(x) = x$  pour tout  $g \in G$ . *Indication : commencer par se ramener au cas où  $E$  est de dimension finie.*

b) On suppose que  $E$  est de dimension finie. Montrez qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que pour tout  $g \in G$ , la matrice dans  $\mathcal{B}$  de l'endomorphisme de  $E$  qui correspond à  $g$  soit triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

**Exercice 3.** Soit  $G$  un groupe fini, et soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ ; on pose  $n = [G : H]$ . Montrez qu'il existe un sous-groupe distingué de  $G$  contenu dans  $H$  et d'indice divisant  $n!$ . *Indication : on pourra considérer l'action naturelle à gauche de  $G$  sur  $G/H$ .* En déduire que si  $n$  est le plus petit nombre premier divisant le cardinal de  $G$ , alors  $H$  est distingué. Lorsque  $n = 2$ , donnez une preuve directe de ce résultat.

**Exercice 4.** *Coloriages du cube.*

a) Soit  $G$  un groupe opérant sur un ensemble  $E$ . Si  $G$  et  $E$  sont finis, montrez la *formule de Burnside*

$$|G| \times \text{nombre d'orbites} = \sum_{g \in G} |E^g|$$

où  $E^g$  désigne pour tout  $g$  l'ensemble des points fixes de  $g$ .

b) On fixe un entier  $k \geq 1$ . Un commerçant vend des cubes coloriés à l'aide de  $k$  teintes, chaque face étant monochrome. Combien de modèles différents peut-il proposer ?