Université de Nice - Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de mathématiques
Semaine du 15 au 21 octobre 2007

Exercice 1. Soit G un groupe simple et soit φ un morphisme de G dans un groupe H. Montrez que φ est ou bien injectif, ou bien trivial (*i.e.* $\varphi(g) = e$ pour tout $g \in G$).

Exercice 2. Soit G un groupe.

a) Soit $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs, c'est-à-dire par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ avec x et y dans G. Montrez que $D(G)$ est distingué et que le quotient $G/D(G)$ est abélien. Soit π la flèche quotient de G vers $G/D(G)$. Montrez que pour tout morphisme f de G vers un groupe abélien H, il existe un unique morphisme g de $G/D(G)$ vers H tel que $f = g \circ \pi$.

b) Soit $(D^n(G))_n$ la suite de sous-groupes de G telle que $D^0(G) = G$ et $D^{n+1}(G) = D(D^n(G))$ pour tout n. Montrez l'équivalence des deux propositions ci-dessous :

i) il existe n tel que $D^n(G) = \{0\}$;
ii) il existe une suite finie $G = G_0,\ G_1, G_2,\ \ldots, G_n = \{e\}$ de sous-groupes de G possédant la propriété suivante : *pour tout i le groupe G_{i+1} est un sous-groupe distingué de G_i et le quotient G_i/G_{i+1} est abélien.*

Un groupe qui satisfait ces deux conditions équivalentes est dit *résoluble*.

c) Montrez que tout p-groupe est résoluble. *Indication : on pourra utiliser l'exercice 1 de la feuille consacrée aux groupes opérant sur un ensemble.*

Exercice 3. On admet que A_n est simple pour tout entier n au moins égal à 5. Soit n un tel entier ; donnez la liste de tous les sous-groupes distingués de S_n.

Exercice 4. *Produit semi-direct.* Soient H et F deux groupes, et soit φ un morphisme de groupes de F dans $\operatorname{Aut} H$.

a) On munit l'ensemble $H \times F$ de la loi interne $*$ définie par la formule

$$(h, f) * (h', f') = (h\varphi(f)(h'), ff').$$

Vérifiez que $H \times F$ muni de cette loi est un groupe, que l'on notera $H \rtimes_\varphi F$. On l'appelle *produit semi-direct de H et F (relativement à φ).* Montrez que $h \mapsto (h, e)$ (resp. $f \mapsto (e, f)$) identifie H (resp. F) à un sous-groupe distingué (resp. à un sous-groupe) de $H \rtimes_\varphi F$; vérifiez que les images de H et F par ces deux injections ont une intersection réduite au neutre et engendrent $H \rtimes_\varphi F$.

b) Soit G un groupe et soit H un sous-groupe distingué de G ; on note π le morphisme quotient $G \to G/H$. Montrez que les propositions suivantes sont équivalentes :

i) il existe un sous-groupe F de G tel que $H \cap F = \{e\}$ et tel que F et H engendrent G ;
ii) il existe un sous-groupe F de G et un morphisme φ de F dans $\operatorname{Aut} H$ tel que $(h, f) \mapsto hf$ induise un isomorphisme $H \rtimes_\varphi F \simeq G$;
iii) il existe un morphisme σ de G/H dans G tel que $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}$.