

Exercice 1. Soit G un groupe de cardinal 6.

- a) Montrez que le nombre de 2-sous-groupes de Sylow de G est égal à 1 ou 3.
- b) Supposons que ce nombre vaut 1. Montrez qu'il existe deux éléments g et h de G d'ordres respectifs 2 et 3 et qui commutent ; en déduire que $G \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
- c) Supposons que ce nombre vaut 3. On fait opérer G par conjugaison sur l'ensemble de ses 2-sous-groupes de Sylow. Montrez que l'action est fidèle et conclure.

Exercice 2. Soit G un groupe de cardinal 21. Combien a-t-il de 7-sous-groupes de Sylow ? En déduire qu'il existe un morphisme φ de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\text{Aut } \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ tel que $G \simeq (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \rtimes_{\varphi} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Décrire l'ensemble des morphismes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\text{Aut } \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et donner la liste, à isomorphisme près, de tous les groupes de cardinal 21.

Exercice 3. Soient p et q deux nombres premiers distincts tels que le PGCD de pq et $(p-1)(q-1)$ soit égal à 1. Soit G un groupe de cardinal pq . Combien a-t-il de p -sous-groupes de Sylow ? En déduire qu'il existe un morphisme φ de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ dans $\text{Aut } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rtimes_{\varphi} (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. Décrire l'ensemble des morphismes de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ dans $\text{Aut } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et montrez que $G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Soit E un ensemble fini dont on note n le cardinal. On choisit une numérotation a_1, \dots, a_n des éléments de E .

- a) Montrez que la famille de transpositions $(\tau_{a_i, a_{i+1}})_{i=1, \dots, n-1}$ engendre S_E .
- b) Soit G un sous-groupe de S_E contenant τ_{a_1, a_2} et le n -cycle (a_1, a_2, \dots, a_n) ; montrez que $G = S_E$.

Exercice 5. Soit E un ensemble dont le cardinal est un nombre premier p .

- a) Soit G un sous-groupe de S_E contenant un p -cycle et une transposition ; montrez que $G = S_E$.
- b) Soit G un sous-groupe de S_E dont le cardinal est multiple de p et qui contient une transposition ; montrez que $G = S_E$.

Exercice 6. Combien de \mathbb{F}_2 -droites vectorielles y a-t-il dans \mathbb{F}_2^2 ? En déduire un morphisme $\text{GL}_2(\mathbb{F}_2) \rightarrow S_3$, et montrez qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Exercice 7. Soit σ une permutation d'un ensemble E à n éléments, dont la décomposition canonique comprend q_1 cycles de longueur l_1 , q_2 cycles de longueur l_2 , etc. (les n_i étant bien entendu deux à deux distincts) ; déterminez, en fonction des q_i et des l_i , le cardinal de la classe de conjugaison de σ dans S_E .

Exercice 8. On rappelle le résultat suivant, que vous devez connaître et savoir démontrer : si k est un corps et n un entier, les matrices de transvection (c'est-à-dire celles qui sont de la forme $I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et λ dans k^*) engendrent le sous-groupe $\text{SL}_n(k)$ de $\text{GL}_n(k)$ défini comme le noyau du déterminant.

a) Soient k un corps fini et q son cardinal, et soit n un entier au moins égal à 2. Pour tout automorphisme (linéaire) u de k^n , on note $\varepsilon(u)$ la signature de la permutation de l'ensemble k^n induite par u .

b) Déterminez $\varepsilon(u)$ lorsque u est donnée par une matrice de transvection dans la base canonique.

c) En déduire que si q est impair, ou bien si q est pair et n au moins égal à 3, il existe un homomorphisme de groupes ρ de k^* dans $\{-1, 1\}$ tel que $\varepsilon(u) = \rho(\det u)$ pour tout automorphisme u de k^n .

d) On suppose q pair et n au moins égal à 3; montrez que $\varepsilon(u) = 1$ pour tout automorphisme u de k^n .

e) On suppose q impair; montrez que $\varepsilon(u) = 1$ (resp. $\varepsilon(u) = -1$) si $\det u$ est un carré dans k^* (resp. n'est pas un carré dans k^*).