

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2.

a) Soient u et v deux vecteurs unitaires de E . Montrez qu'il existe une et une seule isométrie directe $r_{u \rightarrow v}$ de E qui envoie u sur v .

b) Soit \mathcal{C} l'ensemble des couples de vecteurs unitaires de E ; on s'intéresse aux actions naturelles de $\text{SO}(E)$ et de $\text{O}(E)$ sur \mathcal{C} . Montrez que l'orbite d'un couple (u, v) sous l'action de $\text{SO}(E)$ est l'ensemble des couples (u', v') tels que $r_{u' \rightarrow v'} = r_{u \rightarrow v}$. **Remarque : une telle orbite est ce qu'on appelle un angle orienté.**

c) Soit $(u, v) \in \mathcal{C}$. Montrez qu'il existe une isométrie indirecte de E échangeant u et v .

d) Montrez que l'orbite d'un couple (u, v) sous l'action de $\text{O}(E)$ est l'ensemble des couples (u', v') tels que

$$r_{u' \rightarrow v'} = r_{u \rightarrow v} \text{ ou } r_{u' \rightarrow v'} = r_{u \rightarrow v}^{-1};$$

montrez qu'on peut également la caractériser comme l'ensemble des couples (u', v') tels que $\langle u'|v' \rangle = \langle u|v \rangle$. **Remarque : une telle orbite est ce qu'on appelle un angle (non orienté).** À quelle condition sur (u, v) ses orbites sous $\text{SO}(E)$ et sous $\text{O}(E)$ coïncident-elles ?

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension au moins égale à 3 et soit (u, v) un couple de vecteurs unitaires de E . Montrez que les orbites de (u, v) sous $\text{SO}(E)$ et sous $\text{O}(E)$ coïncident, et qu'elles peuvent toutes deux se décrire comme l'ensemble des couples (u', v') tels que $\langle u'|v' \rangle = \langle u|v \rangle$. **Remarque : cet exercice montre qu'il n'existe pas de bonne théorie des angles orientés en dimension au moins égale à 3.**

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit \mathcal{B} l'ensemble des bases orthonormées de E . On fait opérer les groupes $\text{SO}(E)$ et $\text{O}(E)$ sur \mathcal{B} de manière naturelle. Combien y a-t-il d'orbites dans \mathcal{B} sous l'action de $\text{O}(E)$? Et sous l'action de $\text{SO}(E)$?

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel sur un corps k , soit d un entier inférieur ou égal à la dimension de E et soit \mathcal{P} l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension d .

a) Montrez que $\text{GL}(E)$ agit transitivement sur \mathcal{P} .

b) Si E est de dimension 2 et si $d = 1$, montrez que cette action est même 3-transitive; donnez une interprétation de ce fait dans le langage de la géométrie projective.

c) En supposant que E est de dimension finie n sur un corps fini k de cardinal q , déterminez le cardinal du stabilisateur d'un élément de \mathcal{P} , puis le cardinal de \mathcal{P} .

Exercice 5.

a) Soit k un corps algébriquement clos ; l'on fait opérer $\mathrm{GL}_n(k)$ sur $\mathrm{M}_n(k)$ par automorphismes intérieurs. Donnez un sous-ensemble S de $\mathrm{M}_n(k)$ qui rencontre une et une seule fois chaque orbite.

b) Soit k un corps ; l'on considère l'opération

$$((g, h), M) \mapsto gMh^{-1}$$

de $\mathrm{GL}_n(k) \times \mathrm{GL}_n(k)$ sur $\mathrm{M}_n(k)$. Donnez un sous-ensemble S de $\mathrm{M}_n(k)$ qui rencontre une et une seule fois chaque orbite.

c) Même question qu'en b) lorsque k n'est plus nécessairement un corps, mais simplement un anneau principal.