Université de Nice - Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de mathématiques
Semaine du 4 au 10 février 2008

Exercice 1. La décomposition des isométries affines.

a) Soit k un corps et soit F un k-espace vectoriel de dimension finie. Soit l un endomorphisme de F. Montrez que les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $\mathsf{Ker}\ l$ a un supplémentaire stable ;

ii) $F = \mathsf{Ker}\ l \oplus \mathsf{Im}\ l$.

b) Soit E un espace affine sur k et soit f une application affine de E dans lui-même. Montrez que l'ensemble des points fixes de f ou bien est vide, ou bien est un espace affine d'espace directeur $\mathsf{Ker}\ (\vec{f} - \mathsf{Id})$. Supposons que l'on ait

$$\vec{\mathsf{E}} = \mathsf{Ker}\ (\vec{f} - \mathsf{Id}) \oplus \mathsf{Im}\ (\vec{f} - \mathsf{Id}).$$

Montrez qu'il existe un unique couple $(g, \vec{v})$ où g est une application affine de E dans lui-même *admettant un point fixe* et $\vec{v}$ un élément de $\mathsf{Ker}\ (\vec{f} - \mathsf{Id})$ tels que $f = \tau_{\vec{v}} \circ g$; montrez que l'on a également $f = g \circ \tau_{\vec{v}}$. En déduire le corollaire suivant : si E est de dimension finie et si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, alors f a un unique point fixe. *À titre d'exercice supplémentaire, vous pouvez essayer de démontrer ce corollaire directement.*

c) Soit E un espace affine euclidien de dimension finie et soit u une isométrie affine de E. Montrez que

$$\vec{\mathsf{E}} = \mathsf{Ker}\ (\vec{u} - \mathsf{Id}) \oplus \mathsf{Im}\ (\vec{u} - \mathsf{Id}),$$

ce qui permet d'appliquer les résultats de *b*).

Exercice 2. Soit E un espace affine réel et soit G un sous-groupe fini du groupe des bijections affines de E dans E.

a) Montrez qu'il existe un point O de E qui est fixe sous chacun des éléments de G.

b) Montrez qu'il existe un produit scalaire sur l'espace vectoriel directeur de E pour lequel tous les éléments de G sont des isométries.

Commentaire : on ramène ainsi l'étude des sous-groupes finis du groupe affine à celui des sous-groupe finis du groupe orthogonal.

Exercice 3. Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 et soit C un cube de E de sommets A, B, C, D, E, F, G, H. Soit G (resp. G^+) le groupe des isométries affines de E qui stabilisent C.

a) Si u est une isométrie directe de $\vec{\mathsf{E}}$, décrire, en fonction de l'axe de u et du cosinus de son angle, l'ensemble des droites vectorielles de $\vec{\mathsf{E}}$ invariantes sous u.

b) Si g appartient à G, expliquez brièvement pourquoi g envoie tout sommet de C sur un autre sommet, et toute diagonale de C sur une autre diagonale. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des 4 diagonales du cube. Pour tout g de G, l'on désigne par σ_g la permutation de $\mathbb{D}$ induite par g.

c) Donnez un élément non trivial du noyau du morphisme $g \mapsto \sigma_g$, qui va de G dans $\mathfrak{S}_{\mathbb{D}}$.

d) Montrez que la restriction à G^+ de $g \mapsto \sigma_g$ est injective.

e) Montrez que la restriction à G^+ de $g \mapsto \sigma_g$ est surjective. *Indication : il suffit de montrer que son image contient toutes les transpositions.*

f) En déduire que G est isomorphe à $\{-1, 1\} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{D}}$.

Exercice 4. Soit E un espace affine euclidien. Montrez que le groupe des isométries affines directes de E est connexe par arcs ; en déduire la liste des composantes connexes du groupe des isométries affines de E.