SERIES ENTIERES

Un corrigé de l'exercice 5

1- La fonction $f : x \mapsto (\arcsin x)^2$ est définie et continue sur $[-1, 1]$. Elle est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$. On a

$$f'(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad f''(x) = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

pour $x \in]-1, 1[$ et on vérifie facilement que f est bien solution de

$$\text{(E)} \qquad (1-x^2)y'' - xy' = 2$$

sur $]-1, 1[$.

2- Trouver les séries entières solutions (locales) de (E), c'est trouver des coefficients $(a_n)_{n\geq 0}$ et un nombre $r > 0$ tels que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence strictement positif, supérieur ou égal à r, et tels que la somme $g(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ soit solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $]-r, r[$.

On commence par chercher une condition nécessaire. On suppose donc que $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R supérieur ou égal à un certain $r > 0$ et que la somme de cette série, notée g, est solution de (E) sur $]-r, r[$. On sait que

$$g'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}, \qquad g''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

sur $]-R, R[$ et donc en particulier sur $]-r, r[$. Comme g est supposée solution de (E) sur $]-r, r[$, on en déduit que

$$(1-x^2) \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = 2,$$

soit,

$$\sum_{n\geq 0} b_n x^n = 2$$

pour tout $x \in]-r, r[$ avec $b_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n$ pour tout $n \geq 0$.

D'après le théorème des zéros isolés, on en déduit que $b_0 = 2$ et $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ (on considère ici la fonction constante et égale à 2 comme la somme de la série entière

$\sum c_n x^n$ de rayon de convergence infini et de coefficients $c_0 = 2$, $c_n = 0$ pour $n \geq 1$ et on utilise le théorème des zéros isolés qui assure que si la somme de deux séries entières coïncident sur un voisinage de zéro alors leurs coefficients sont égaux).

En revenant aux coefficients a_n, on en déduit que

$$a_2 = 1 \quad \text{et} \quad a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} a_n \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Réciproquement il reste à vérifier que de telles séries entières sont effectivement bien des solutions locales de (E). Soit donc $\sum a_n x^n$ une série entière où a_0 et a_1 sont quelconques, $a_2 = 1$ et $a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} a_n$ pour $n \geq 1$. On commence par vérifier que son rayon de convergence est strictement positif (et donc que la somme de cette série entière est bien définie sur un voisinage ouvert *non vide* de zéro). On remarque que $|a_{n+2}| \leq |a_n|$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit que les suites des termes d'indice pair $(|a_{2n}|)_{n\geq 1}$ et d'indice impair $(|a_{2n+1}|)_{n\geq 0}$ sont toutes deux décroissantes et positives donc bornées et par suite que la suite (a_n) est elle-même bornée. Ce qui implique que le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1. On vérifie ensuite grâce à des calculs similaires aux précédents que la somme d'une telle série entière est bien solution de (E) sur $]-R, R[$ (et on peut donc prendre ici $r = R$).

En résumé, on vient de montrer que les séries entières solutions de (E) sont les séries entières déterminées par la donnée arbitraire des deux premiers coefficients a_0 et a_1 et dont les coefficients suivants vérifient les conditions $a_2 = 1$ et $a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} a_n$ pour $n \geq 1$.

De plus on a aussi montré que de telles séries entières ont toujours un rayon de convergence R supérieur ou égal à 1 et qu'elles sont solutions de (E) sur tout l'intervalle $]-R, R[$.

3- On a vu que f est une solution de (E) sur $]-1, 1[$ et on sait que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. D'autre part on vient de montrer que la série entière $g(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ où $g(0) = a_0 = 0$, $g'(0) = a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} a_n$ pour $n \geq 1$, est également solution de (E) sur $]-1, 1[\subset]-R, R[$ avec les mêmes conditions initiales $g(0)$ et $g'(0)$ que f. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit que f et $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ coïncident sur $]-1, 1[$, ce qui répond à la question.

NB : on peut calculer explicitement les coefficients de ce développement en série entière grâce à la relation de récurrence. On trouve $a_0 = 0$, $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \geq 0$ et

$$a_{2n} = 2^{2n-1} \frac{(n-1)! \times (n-1)!}{(2n)!}$$

pour tout $n \geq 1$.