Développements eulériens de $cotg(z)$ et sa dérivée.

1 $f(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \quad , g(z) := \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$

1. Montrer que la série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$.
2. Montrer que f est méromorphe, de période 1, de pôles doubles $\frac{1}{(z-n)^2}$, $n\in\mathbb{Z}$, puis que $\lim_{|Imz|\to+\infty} f(z) = 0$.
3. Montrer que g vérifie les mêmes propriétés que f. ($|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2(x)+\sinh^2(y)$)
4. En déduire que $f-g$ est holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$ puis que $f\equiv g$.
5. Obtenir $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.

2 $F(z) := \pi cotg(\pi z) \quad ,$ $G(z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{-N}^{N}\frac{1}{z-n} = \frac{1}{z}+2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2} = \frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$

1. Vérifier que F est méromorphe, de période 1, de pôles simples $\frac{1}{z-n}$, $n\in\mathbb{Z}$.
2. Soient $r_N = N+\frac{1}{2}$, $\Gamma_N : \theta \to r_N e^{i\theta}$, $N\in\mathbb{N}$, $|x|<r_N$, $x\notin\mathbb{Z}$. Obtenir à l'aide du théorème des résidus: $\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_N}\frac{F(z)}{z-x}dz = F(x)+\sum_{-N}^{N}\frac{1}{n-x}$.
3. Montrer que F est uniformḿent bornée sur les cercles Γ_N.
4. De l'imparité de F en déduire que $\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N}\frac{F(z)}{z-x}dz = 0$, puis que $F=G$.

3 Deux liens entre les deux exercices

1. Obtenir le résultat de l'exercice 1 à l'aide de celui de l'exercice 2.
2. Trouver le développement de la cotangente à l'aide de la méthode de l'exercice 1.

Références: de cours avec des exemples corrigés

- [C], Henri Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques, p. 152-155.
- [D], Jean Dieudonné, Calcul infintésimal, p. 289-292 .