Université de Nice
Préparation à l'agrégation de Mathématiques
Algèbre et géométrie

Année 2007-2008

# Développement : fonction bipériodique de Weierstrass

**Théorème 1 (Cartan, V.2.1)** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et pour tout $k \geq 0$ une fonction holomorphe $f_k : U \to \mathbb{C}$. Si la série $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge normalement sur tout compact de $U$, alors sa somme définit une fonction holomorphe sur $U$, dont la dérivée est la somme de la série $\sum_{n\geq 0} f_n'$ qui converge aussi normalement sur tout compact de $U$.*

**Lemme 2 (Cartan, V.2.5)** *Soit $G$ un réseau du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Alors la série $\sum_{g\in G\setminus\{0\}} 1/g^t$ converge absolument pour tout réel $t \geq 3$.*

**Corollaire 3 (Cartan, prop. V.2.5.1)** *Soit $G$ un réseau du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{C}$ et soit*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{g\in G\setminus\{0\}} \frac{1}{(z-g)^2} - \frac{1}{g^2}.$$

*La série définissant $\wp$ converge normalement sur tout compact de $U = \mathbb{C} \setminus G$ et définit une fonction holomorphe $G$-périodique sur $U$ admettant un pôle double en tout point de $G$.*

*Elle satisfait l'équation différentielle :*

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - a\wp - b$$

*où $a$ et $b$ sont les nombre complexes définis par $a := 60\sum_{g\in G\setminus\{0\}} 1/g^4$ et $b := 140\sum_{g\in G\setminus\{0\}} 1/g^6$.*

Preuve du lemme 2 :

**1.** Soit $(u, v)$ une base de $G$. Montrer qu'il existe $r \geq 0$ tel que pour tout élément non-nul $g$ de $G$, $|g| \geq r$. Interprétation géométrique.

**2.** Réécrire la somme de l'énoncé à l'aide de la partition $G = \cup_{k\geq 0}\{mu + nv,\ (m, n) \in \mathbb{Z}^2,\ \max\{|m|, |n|\} = k$. Montrer que si $\max\{|m|, |n|\} = k$, alors $|mu + nv| \geq kr$. Interprétation géométrique.

**3.** Déterminer un majorant de $\sum_{\max\{|m|,|n|\}=k} 1/|mu + nv|^t$ à $k$ fixé, puis un équivalent de ce majorant lorsque $k \to +\infty$ et conclure.

Preuve du corollaire 3 :

**4.** Soit $R \in \mathbb{R}_+$ ; déterminer un majorant du terme général de la série définissant $\wp$ en fonction de $|g|$, lorsque $|z| \leq R$ et $|g| \geq 2R$. En déduire que cette série converge normalement sur tout compact de $U$ inclu dans $\overline{B}(0, R)$, puis que $\wp$ est bien définie et holomorphe sur $U$.

**5.** Montrer que $\wp'$ est $G$-périodique. En déduire que $\wp$ l'est aussi, en étudiant sa parité.

**6.** Montrer que $\wp$ admet un pôle double en zéro, puis en tout point de $G$. Calculer les trois premiers termes du développement de $\wp$ en série de Laurent en 0.

**7.** Calculer $\wp'$ sous forme d'une somme sur $g \in G$, montrer qu'elle admet un pôle triple en tout point de $G$ et calculer les quatre premiers termes de son développement en série de Laurent.

**8.** Calculer les sept premiers termes du développement en série de Laurent de $f := \wp'^2 - 4\wp^3 + a\wp + b$ et en déduire que $f$ admet un prolongement holomorphe de $U$ à $\mathbb{C}$ tout entier.

**9.** Montrer que $f$ est $G$-périodique sur $\mathbb{C}$, en déduire qu'elle est bornée et conclure.

Référence : H. Cartan, Théorie des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann.