PREPARATION A L'AGREGATION DE MATHEMATIQUES 2007-08
UNIVERSITE DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS

## TD-DEVELOPPEMENT : EQUIREPARTITION

Soit $(x_n)$ une suite à valeurs dans $[0,1[$. On dit que $(x_n)$ est équirépartie si, pour tous $0 \leq a < b < 1$, la suite

$$N(a,b,n) = \mathrm{card}\{m \leq n;\, x_m \in [a,b[\}$$

est équivalente à $n(b-a)$ quand $n$ tend vers l'infini. Plus généralement, on dit qu'une suite de réels $(x_n)$ est équirépartie si la suite $(y_n)$ l'est (au sens précédent) où $y_n$ désigne l'unique réel de $[0,1[$ tel que $x_n - y_n \in \mathbb{Z}$.

**1-** Montrer que si $(x_n)$ est équirépartie alors la suite $(y_n)$ associée comme ci-dessus est dense dans $[0,1[$.

**2-** Montrer que $(x_n)$ est équirépartie si et seulement si, pour toute fonction $f$ périodique de période 1 et intégrable au sens de Riemann, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_0^1 f(t)\, dt.$$

**3-** Montrer qu'il suffit d'avoir l'égalité précédente pour toute fonction continue et périodique de période 1 pour obtenir l'équirépartition de la suite $(x_n)$.

**4-** Montrer que $(x_n)$ est équirépartie si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2im\pi x_k} = o(n)$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}^*$. Il s'agit du critère de Weyl.
*Indication.* Penser à utiliser le théorème de Stone-Weierstrass (ainsi que ce qui précède).

**5-** Pour quelles valeurs du réel $\theta$ la suite $(n\theta)$ est-elle équirépartie ?