Extensions de corps

Partie correspondante du programme:

III.3. Corps: Sous-corps. Caractéristique. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss. Quaternions.

III.6. Racines d'un polynôme: Multiplicité d'une racine. Éléments algébriques et transcendants. Extensions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis.

Leçons d'oral concernées:

114. Corps finis. Applications.

118. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Résumé

Extensions: $\mathrm{K} \subset \mathrm{L}$. Extensions finies, degré: $[\mathrm{L} : \mathrm{K}] := \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{L}$.
Multiplicativité: Si $\mathrm{K} \subset \mathrm{L} \subset \mathrm{M}$, $[\mathrm{M} : \mathrm{K}] = [\mathrm{M} : \mathrm{L}][\mathrm{L} : \mathrm{K}]$.
Élément algébrique, élément transcendant dans une extension $\mathrm{K} \subset \mathrm{L}$. Structure du corps $\mathrm{K}(\alpha)$. Polynôme minimal.
Corps de rupture d'un polynôme irréductible $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ $(= \mathrm{K}[\mathrm{X}]/(\mathrm{P}))$. Corps de décomposition.

Exercices

1) Montrer que le polynôme $\mathrm{X}^4 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Décrire son corps de décomposition; quel est le degré de ce corps sur $\mathbb{Q}$?

2) Soit K un corps, $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme irréductible, $\mathrm{L} \supset \mathrm{K}$ un corps de rupture pour P. Dans L on a $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \alpha)\mathrm{Q}(\mathrm{X})$, avec $\alpha \in \mathrm{L}$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{L}[\mathrm{X}]$. Le polynôme Q est-il irréductible? Donner des exemples (avec $\deg \mathrm{P} \geq 3$).

3) a) Donner le polynôme minimal P de $\sqrt{2} + i$ sur $\mathbb{Q}$.

b) Montrer que pour tout nombre premier p, l'image de P dans $\mathbb{F}_p[\mathrm{X}]$ n'est pas irréductible (utiliser le fait que les carrés forment un sous-groupe d'indice 2 dans $\mathbb{F}_p^*$).