TD-DEVELOPPEMENT :
Inégalités de Hölder et de Minkowski - Complétude de Lᵖ.

Dans toute la suite X désigne un espace mesuré muni d'une mesure positive μ.

1 - Soient p et $q \in]1, +\infty[$ deux exposants conjugués ($1/p+1/q = 1$) et soient $f : X \to [0, +\infty]$ et $g : X \to [0, +\infty]$ deux applications mesurables.

a - Montrer que, pour tout $a \geq 0$ et tout $b \geq 0$, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

b - En déduire que, pour tout $\lambda > 0$,

$$\int_X fg \, d\mu \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \int_X f^p \, d\mu + \frac{1}{\lambda q} \int_X g^q \, d\mu.$$

c - En choisissant judicieusement λ, en déduire que

$$\int_X fg \, d\mu \leq \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X g^q \, d\mu \right)^{1/q}.$$

d - En déduire que

$$\left(\int_X (f+g)^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X g^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

2 - Soient p et $q \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués. Montrer que si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$ alors $fg \in L^1(\mu)$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

3 - Soit $p \in [1, +\infty]$. Montrer que $L^p(\mu)$ est un espace vectoriel et que $\| \cdot \|_p$ est une norme sur $L^p(\mu)$.

4 - On va maintenant montrer que $L^p(\mu)$ muni de $\| \cdot \|_p$ est complet.

a - Traiter le cas $p = +\infty$. Considérer (f_n) une suite de Cauchy dans $L^\infty(\mu)$. Montrer que, pour presque tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy donc converge vers une limite $f(x)$ puis montrer que $f \in L^\infty(\mu)$ et que $f_n \to f$ dans $L^\infty(\mu)$.

On considère maintenant le cas où $p \in [1, +\infty[$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$.

b - Rappeler pourquoi il suffit de montrer qu'il existe une sous-suite qui converge dans $L^p(\mu)$.

c - Extraire une sous-suite (f_{n_k}) telle que $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}$ pour tout $k \geq 1$. Pour alléger les notations, on renote cette sous-suite (f_k) dans ce qui suit.

d - On note $g_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$. Montrer que, pour presque tout $x \in X$, $g_n(x)$ converge vers une limite finie $g(x)$ et que $g \in L^p(\mu)$.

e - En déduire que, pour presque tout $x \in X$, la suite $(f_k(x))$ est de Cauchy donc converge vers une limite $f(x)$.

f - Montrer que $f \in L^p(\mu)$ et que $f_k \to f$ dans $L^p(\mu)$.