TD-DEVELOPPEMENT : METHODE DE LAPLACE

Soient $[a, b[$ un intervalle, borné ou non, de $\mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, $\varphi : [a, b[\to \mathbb{R}$ de classe C^2 et strictement croissante sur $[a, b[$, $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ telle que $e^{-t_0\varphi} f$ soit intégrable sur $[a, b[$ pour un certain $t_0 \in \mathbb{R}$. On suppose de plus que f est continue en a avec $f(a) \neq 0$. On cherche un équivalent quand $t \to +\infty$ à

$$F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\, dx.$$

1- Montrer que F est bien définie pour tout $t \geq t_0$.

Le cas où $\mathbf{a = 0}$ et $\boldsymbol{\varphi(x) = x}$.
2- Montrer que pour $\alpha > 0$ fixé bien choisi, on a

$$\int_0^\alpha e^{-tx} f(x)\, dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{f(0)}{t} \quad \text{et} \quad \int_\alpha^b e^{-tx} f(x)\, dx = O(e^{-t\alpha}).$$

3- En déduire un équivalent à $F(t)$.

Le cas où $\boldsymbol{\varphi' > 0}$ sur $\mathbf{[a, b[}$.
4- Montrer que dans ce cas

$$F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{t\, \varphi'(a)}.$$

On pourra effectuer un changement de variables $y = \varphi(x) - \varphi(a)$ et utiliser le cas précédent.

Le cas où $\mathbf{a = 0}$ et $\boldsymbol{\varphi(x) = x^2}$.
5- En raisonnant de manière similaire à la question 2, montrer que

$$F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}\, f(0)}{2\sqrt{t}}.$$

Le cas où $\boldsymbol{\varphi' > 0}$ sur $\mathbf{]a, b[}$, $\boldsymbol{\varphi'(a) = 0}$ et $\boldsymbol{\varphi''(a) > 0}$.
6- Montrer que dans ce cas

$$F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\,\varphi''(a)}}\, \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}.$$

On pourra s'inspirer de la question 4 et introduire un changement de variables ad hoc.

Application.
7- Donner un équivalent quand $t \to +\infty$ de

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^t\, dx.$$

On pourra utiliser le changement de variables $x = (1 + y)t$. Retrouver la formule de Stirling.