TD-Développpement Lois des grands nombres

L'exercice 2 (ou 1+2) peut faire un développement; 4 aussi, mais est un peu court; 3 et 5 sont des compléments qui peuvent permettre de répondre aux questions du jury...

Exercice 1 : Loi faible des grands nombres L^2
Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. admettant un moment d'ordre 2. On note $m = EX_i$ et $Z_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$. Montrer que $E(|Z_n - m|^2)$ tend vers 0 (ie Z_n tend vers m dans L^2), et que Z_n tend en probabilité vers m, ie pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(|Z_n - m| > \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \ .$$

Montrer que ces résultats restent valables sous les hypothèses plus faibles (Ouvrard p.107) : les X_i ne sont plus i.i.d., mais seulement deux à deux non corrélées. On suppose de plus

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i \underset{n\to\infty}{\to} m \ ; \ \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{X_i} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \ .$$

Exercice 2 : Loi faible des grands nombres L^1 (Foata-Fuchs pour cette démonstration; sinon Ouvrard, Feller.)

Soit (X_n) une suite de v.a. centrées deux à deux indépendantes, **de même loi**, admettant un **moment d'ordre 1**. On note $Z_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$.

a. Soit $\varepsilon > 0$, et $g_c(x) = I_{[-c,c]}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-c, c]$. Montrer que $||X_1 - g_c \circ X_1||_1 \leq \varepsilon$ pour c assez grand.

b. On note $m_c = E(g_c \circ X_1)$, et $f_c = g_c - m_c$. Montrer que $f_c \circ X_1$ est centrée et que $||X_1 - f_c \circ X_1||_1 \leq \varepsilon$ pour c assez grand. On choisit un tel c dans la suite.

c. On note $Y_k = f_c \circ X_k$ (on remarquera que le f_c construit au **b.** ne dépend que de la loi de X_1). En utilisant le résultat de l'exercice 1, en déduire que $Z'_n = (Y_1 + \ldots + Y_n)/n$ tend vers 0 dans L^2, puis dans L^1.

d. Montrer que $||Z_n - Z'_n||_1 \leq \varepsilon$, et en conclure que Z_n tend vers 0 dans L_1 et en probabilité.

Exercice 3 : Loi forte des grands nombres L^4 (Ref. : Foata-Fuchs p.211).
Soient $X_1, X_2 \ldots$ des v.a.i.i.d. centrées admettant un moment d'ordre 4. On

note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On veut montrer que $S_n/n \to 0$ presque sûrement.
a. Calculer $E(S_n^4)$ en fonction des moments d'ordre 2 et 4 des X_i.
b. Montrer que

$$P(S_n/n > \varepsilon) \leq \frac{E(S_n^4)}{\varepsilon^4 n^4} \ .$$

c. Utiliser le lemme de Borel-Cantelli pour conclure.

Exercice 4 : Polynômes de Bernstein, théorème de Weierstrass.
Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. telles que $P(X_i = 1) = p$, et $P(X_i = 1) = 1 - p$ (loi de Bernoulli de paramètre p). On note $Y_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$.
a. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$P\left(|Y_n - p| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

b. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On note $f_n(p) = E\left(f(Y_n)\right)$. Montrez que

$$||f_n - f||_\infty \to_{n\to\infty} 0 \ .$$

c. Conclure en établissant la relation

$$f_n(p) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} f(\frac{k}{n}) \ .$$

Exercice 5 : Un exemple de suite qui vérifie une loi faible des grands nombres, mais pas une loi forte (Ouvrard p. 112).
Soit (X_n) une suite de v.a. de lois

$$P_{X_n} = \frac{1}{2n\ln n}\left(\delta_n + \delta_{-n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n\ln n}\right)\delta_0$$

On note

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

a. En utilisant l'exercice 1, montrer que Y_n tend vers 0 en probabilité.
b. Montrer que $P\left(\limsup(|X_n| \geq n)\right) = 1$.
c. En utilisant $X_n/n = Y_n - (n-1)Y_{n-1}/n$, montrer que Y_n ne tend pas presque sûrement vers 0.