Nombres algébriques, dimension d'espaces vectoriels

Notations : Soit $\mathrm{K} \subset \mathrm{L}$ une extension de corps. On note $[\mathrm{L} : \mathrm{K}]$ la dimension de L comme espace vectoriel sur K. Si $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de L, on note $\mathrm{K}(a_1, \ldots, a_n)$ le plus petit sous-corps de L contenant K et $a_1, \ldots, a_n$. On dit qu'un élément a de L est *algébrique sur* K s'il existe un polynôme non nul $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(a) = 0$. Le polynôme unitaire P de degré minimal annulant a est appelé *polynôme minimal* de a, son degré est le *degré* de a.

1) *a*) Montrer qu'un élément a de K est algébrique sur K si et seulement si $[\mathrm{K}(a) : \mathrm{K}]$ est fini. Si c'est le cas, cette dimension est égale au degré de a.

b) Soit $\mathrm{K} \subset \mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ des extensions de corps; montrer que $[\mathrm{F} : \mathrm{K}]$ est fini si et seulement si $[\mathrm{F} : \mathrm{E}]$ et $[\mathrm{E} : \mathrm{K}]$ sont finis; si c'est le cas on a $[\mathrm{F} : \mathrm{K}] = [\mathrm{F} : \mathrm{E}][\mathrm{E} : \mathrm{K}]$ (si $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une base de E sur K et $(f_j)_{j \in \mathrm{J}}$ une base de F sur E, montrer que $(e_i f_j)_{(i,j) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}}$ est une base de F sur K).

c) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de L algébriques sur K; montrer que $[\mathrm{K}(a_1, \ldots, a_n) : \mathrm{K}]$ est fini, majoré par le produit des degrés des a_i. A-t-on égalité?

d) Montrer que l'ensemble des éléments de L qui sont algébriques sur K forment un sous-corps $\mathrm{L}_{\mathrm{alg}}$ de L.

e) Si L est algébriquement clos, montrer qu'il en est de même de $\mathrm{L}_{\mathrm{alg}}$.

2) Soit a un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$, de degré $d > 1$, et soit $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ un polynôme de degré d annulant a.

a) Déduire du théorème des accroissements finis qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|x - a| \geq c\,|\mathrm{P}(x)| \quad \text{pour tout } x \in [a-1, a+1]\,.$$

b) En déduire qu'il existe $c' > 0$ tel que $|a - \frac{p}{q}| \geq \frac{c'}{q^d}$ pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$.

c) Montrer que le nombre $a = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^{n!}}$ n'est pas algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Remarque : un théorème de Roth (1955) donne une inégalité bien meilleure que *b*) : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $c > 0$ tel que $|a - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^{2+\varepsilon}}$ pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$.