TD-DEVELOPPEMENT : PROLONGEMENT DES APPLICATIONS UNIFORMEMENT CONTINUES

Théorème : Soient E et F deux espaces métriques. On suppose que F est complet. Soient A une partie dense de E et f une application uniformément continue de A dans F. Il existe une unique application continue $g : E \to F$ qui prolonge f. De plus g est uniformément continue.

Démonstration :

- Montrer que pour tout $x \in E$, $\lim_{a \to x, a \in A} f(a)$ existe. On pose $g(x) = \lim_{a \to x, a \in A} f(a)$.
- Montrer que g est uniformément continue et fournit l'extension recherchée de f.

Corollaire 1 : Soient E et F deux evn. On suppose que F est complet. Soit f une application linéaire continue définie sur un sev dense de E à valeurs dans F. Il existe un unique prolongement linéaire et continu g de f à l'espace E. De plus $|||g||| = |||f|||$.

Corollaire 2 : Soient E un evn et f une forme linéaire continue définie sur un sev dense de E. Il existe un unique prolongement linéaire et continu g de f à l'espace E. De plus $|||g||| = |||f|||$.

- Déduire ces deux corollaires du théorème précédent.

Applications :

1- Construction de l'intégrale de Riemann pour les fonctions réglées.

- On rappelle que l'intégrale de Riemann d'une fonction en escalier Φ définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un Banach F est donnée par la formule :

$$\int_a^b \Phi = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\lambda_i$$

où $(x_0, \ldots, x_n)$ est une subdivision adaptée à Φ et λ_i la valeur constante que prend Φ sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. On rappelle que toute fonction réglée est limite uniforme de fonctions en escalier.

- Montrer que le théorème de prolongement précédent permet d'étendre de manière univoque l'intégrale de Riemann des fonctions en escalier en une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions réglées.

2- Transformée de Fourier-Plancherel.

- On rappelle que la transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est définie par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x}\, dx.$$

On peut montrer, ce que l'on admettra ici, que si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2$.

- Montrer que le théorème de prolongement précédent permet d'étendre de manière univoque l'application $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \mapsto \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ en une application linéaire continue $F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ et que de plus $\|F(f)\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$. L'application F ainsi obtenue est appelée transformée de Fourier-Plancherel.