SERIES ENTIERES

Exercice 1 - Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{n^2}{3^n+n}\, z^n, \qquad \sum b^{\sqrt{n}}\, z^n \quad (b>0), \qquad \sum 2^{-n}\, z^{2n}.$$

Exercice 2 - Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+n+1}{n}\, x^n, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(2n)!}.$$

Exercice 3 - La fonction $x \mapsto \sin|x|$ est-elle développable en série entière en zéro ?

Exercice 4 - Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. Rappeler pourquoi f est développable en série entière en tout point $z \in \Omega$ et donner le rayon de convergence du développement correspondant.

Exercice 5 - On cherche le développement en série entière en zéro de la fonction $f : x \mapsto (\arcsin x)^2$.

1- Rappeler le domaine de définition de f et montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad (1-x^2)y'' - xy' = 2$$

sur un intervalle que l'on précisera.

2- Déterminer les séries entières solutions de (E).

3- En déduire que f est développable en série entière en zéro. Plus précisément déterminer les coefficients ainsi que le rayon de convergence de ce développement et montrer que f est égale à la somme de son développement en série entière en zéro sur $]-1,1[$.

Exercice 6 - Existe-il des solutions développables en série entière en zéro à l'équation différentielle $x^2y' - y = -x^2$?

Exercice 7 - Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad g(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

1- Montrer que f et g sont développables en série entière en zéro et que le rayon de convergence de chacune des deux séries est infini.

2- Déterminer les coefficients du développement en série entière de f en zéro. En déduire une expression de $\int_0^1 f(t)\, dt$ à l'aide de la somme d'une série numérique.

3- Montrer que g est solution de l'équation différentielle $y' - xy = 1$. En déduire les coefficients du développement en série entière de g en zéro.

4- Déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)} = \sqrt{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \times n! \times (2n+1)}.$$

Exercice 8 - Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes.

1- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{pn}$ (où p est un entier strictement positif) en fonction de celui de $\sum a_n z^n$.

2- On pose $c_{2n} = a_n$ et $c_{2n+1} = b_n$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$ en fonction de ceux de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$