DIVERGENCE DES SERIES DE FOURIER
THEOREME DE FEJER

Quelques notations.

On désigne par :

. $C_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques,

. $L^p_{2\pi}$ l'ensemble des (classes de) fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Lebesgue-mesurables, 2π-périodiques et telles que $\|f\|_p < +\infty$ où

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty$$

$$\text{et } \|f\|_\infty = \operatorname{supess} |f(x)|,$$

. $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $e_n(x) = e^{inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$,

. $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx$ le n-ième coefficient de Fourier de $f \in L^1_{2\pi}$ $(n \in \mathbb{Z})$,

. $(f * g)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x-y)\,g(y)\,dy$ le produit de convolution de $f \in L^1_{2\pi}$ et $g \in L^1_{2\pi}$,

. $D_N = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e_n$ le noyau de Dirichlet,

. $K_N = \dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{n=0}^{N} D_n$ le noyau de Féjer,

. $S_N(f) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\,e_n = f * D_N$ la N-ième somme partielle de la série de Fourier de $f \in L^1_{2\pi}$,

. $\Sigma_N(f) = \dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{n=0}^{N} S_n(f) = f * K_N$ la N-ième somme partielle de la série de Féjer de $f \in L^1_{2\pi}$.

Divergence des séries de Fourier

On munit $C_{2\pi}$ de la norme infinie qui en fait un espace de Banach. Le but est démontrer le résultat suivant :

Soit D une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ alors $\{f \in C_{2\pi}; \forall\, x \in D,\ \sup_N |S_N(f)(x)| = +\infty\}$ est un G_δ (i.e. une intersection dénombrable d'ouverts) dense de $C_{2\pi}$.

1- Soit $N \geq 1$. Montrer que la forme linéaire $L_N : f \in C_{2\pi} \mapsto S_N(f)(0)$ est continue de norme inférieure ou égale à $\|D_N\|_1$.

2- On pose $O_1 = \{x \in \mathbb{R};\ D_N(x) > 0\}$, $O_2 = \{x \in \mathbb{R};\ D_N(x) < 0\}$, $F_1^k = \{x \in \mathbb{R};\ \mathrm{dist}(x, O_1^c) \geq 1/k\}$, $F_2^k = \{x \in \mathbb{R};\ \mathrm{dist}(x, O_2^c) \geq 1/k\}$ et

$$f_k(x) = \frac{\mathrm{dist}(x, F_2^k) - \mathrm{dist}(x, F_1^k)}{\mathrm{dist}(x, F_2^k) + \mathrm{dist}(x, F_1^k)}.$$

Vérifier que f_k est bien définie, que $f \in C_{2\pi}$, $\|f_k\|_\infty = 1$. Montrer que si $x \in O_1$, alors $\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = 1$ et que $\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = -1$ si $x \in O_2$.

3- En utilisant la question précédente, montrer que L_N est de norme $\|D_N\|_1$.

4- Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ et $N \geq 1$ sont fixés, alors la forme linéaire $f \in C_{2\pi} \mapsto S_N(f)(x)$ est continue de norme $\|D_N\|_1$.

5- Montrer que

$$\|D_N\|_1 \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{(N+1/2)\pi} \frac{|\sin u|}{u}\, du \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

En déduire que

$$\lim_{N\to+\infty} \|D_N\|_1 = +\infty.$$

6- Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés. Montrer que $\Omega_n(x) = \{f \in C_{2\pi};\ \sup_N |S_N(f)(x)| > n\}$ est un ouvert dense de $C_{2\pi}$. On pourra montrer que son complémentaire est d'intérieur vide.

7- Conclure. On rappelle le lemme de Baire qui assure que dans un espace métrique complet une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Phénomène de Gibbs

On considère la fonction f 2π-périodique, impaire et telle que $f(x) = 1$ pour $x \in]0, \pi[$.

1- Justifier le fait que $S_N(f)(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2- Montrer que, pour $N \geq 1$,

$$S_{2N-1}(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin{(2n+1)x}}{2n+1}.$$

3- Montrer que, pour $x \in]0, \pi[$,

$$S_{2N-1}(f)'(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(2Nx)}{\sin x}.$$

4- En déduire que

$$\|S_{2N-1}(f)\|_\infty \geq f(\frac{\pi}{2N}) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sin \frac{u}{2N}}\, du.$$

5- Montrer que l'on peut trouver $C > 0$ tel que, pour $x \in]0, \pi/2]$,

$$|\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}| \leq C.$$

6- Déduire de ce qui précède que

$$\liminf_{N \to +\infty} \|S_N(f)\|_\infty \geq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin v}{v}\, dv > \|f\|_\infty.$$

C'est ce qui s'appelle le phénomène de Gibbs.

Le théorème de Féjer

L'énoncé est le suivant :

1- Si $f \in C_{2\pi}$, alors $\|\Sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et

$$\lim_{N \to +\infty} \|\Sigma_N(f) - f\|_\infty = 0.$$

2- Si $f \in L^p_{2\pi}$, $1 \leq p < +\infty$, alors $\|\Sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et

$$\lim_{N \to +\infty} \|\Sigma_N(f) - f\|_p = 0.$$

La propriété cruciale dont découle ce théorème est que la suite des noyaux de Féjer K_N forment une approximation de l'unité. Plus précisément, on a :

. $K_N \geq 0$,

. $\|K_N\|_1 = 1$,

. $\forall\, \delta > 0,\ \sup_{\delta \leq x \leq \pi} K_N(x) \leq \dfrac{1}{N+1} \dfrac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$.