TD : Sous-groupes finis de O(2) et O(3)

1) *a*) Rappeler pourquoi tout sous-groupe d'ordre n de $\mathbf{SO}(2,\mathbb{R})$ est le groupe des rotations d'angle $2k\pi/n$ pour $k\in\mathbb{Z}$.

b) Montrer que $\mathbf{O}(2,\mathbb{R})$ est isomorphe au produit semi-direct $\mathbf{SO}(2,\mathbb{R})\rtimes\mathbb{Z}/2$. Quelle est l'action de $\mathbb{Z}/2$ sur $\mathbf{SO}(2,\mathbb{R})$? Ce produit est-il direct?

c) Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{O}(2,\mathbb{R})$, non contenu dans $\mathbf{SO}(2,\mathbb{R})$. Montrer que G est le groupe des isométries préservant un polygone régulier à n côtés, isomorphe au groupe diédral D_n.

2) *a*) Montrer que le groupe $\mathbf{O}(3,\mathbb{R})$ est isomorphe au produit $\mathbf{SO}(3,\mathbb{R})\times\mathbb{Z}/2$.

b) Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{O}(3,\mathbb{R})$, non contenu dans $\mathbf{SO}(3,\mathbb{R})$; on pose $\mathrm{H}=\mathrm{G}\cap\mathbf{SO}(3,\mathbb{R})$. Montrer que:

– ou bien $-\mathrm{I}\in\mathrm{G}$, et $\mathrm{G}=\{\pm h\mid h\in\mathrm{H}\}$ est isomorphe au produit $\mathrm{H}\times\mathbb{Z}/2$;

– ou bien $-\mathrm{I}\notin\mathrm{G}$; G est cyclique d'ordre pair, diédral ou isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ (observer que G est alors isomorphe à un sous-groupe de $\mathbf{SO}(3,\mathbb{R})$, et contient un sous-groupe d'indice 2).

Donner des exemples des deux situations. On rappelle que tout sous-groupe fini de $\mathbf{SO}(3,\mathbb{R})$ est cyclique, diédral, ou isomorphe à $\mathfrak{A}_4$ (groupe du tétraèdre), $\mathfrak{S}_4$ (groupe du cube) ou $\mathfrak{A}_5$ (groupe de l'icosaèdre).

3) Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$.

a) Pour $x\in\mathbb{R}^n$, on pose $q(x)=\sum_{g\in\mathrm{G}}\|g(x)\|^2$, où $\|\ \|$ est la norme euclidienne usuelle. Montrer que q est une forme quadratique positive non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$, vérifiant $q(g(x))=q(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$.

b) En déduire que G est conjugué à un sous-groupe de $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$. Que peut-on dire si $n=2$ ou 3?

4) On note $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ le groupe des matrices 2-2 complexes de déterminant 1, $\mathbf{SU}(2,\mathbb{C})$ le sous-groupe des matrices A vérifiant ${}^t\bar{\mathrm{A}}.\mathrm{A}=\mathrm{I}$, $\mathbf{PGL}(2,\mathbb{C})$ le groupe des homographies $z\mapsto\dfrac{az+b}{cz+d}$.

a) Montrer que tout sous-groupe fini de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathbf{SU}(2,\mathbb{C})$ (même méthode que l'exercice 3).

b) Montrer que l'application qui associe à une matrice $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ l'homographie $z\mapsto\dfrac{az+b}{cz+d}$ est un homomorphisme surjectif de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ dans $\mathbf{PGL}(2,\mathbb{C})$, de noyau $\{\pm\mathrm{I}\}$.

c) Les quaternions fournissent un homomorphisme $\mathbf{SU}(2,\mathbb{C})\to\mathbf{SO}(3,\mathbb{R})$, de noyau $\{\pm\mathrm{I}\}$ (cf. Perrin). En déduire que les sous-groupes finis de $\mathbf{PGL}(2,\mathbb{C})$ sont cycliques, diédraux ou isomorphes à $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$ ou $\mathfrak{A}_5$.