Sous-groupes finis de SO(3)

1) Soit T un tétraèdre régulier, et soit G le groupe des isométries de l'espace préservant T. Le groupe G préserve le centre de gravité de T, donc s'identifie à un sous-groupe du groupe orthogonal $\mathbf{O}(3)$.

a) Le groupe G permute les 4 sommets de T, ce qui fournit un homomorphisme $\varphi : \mathrm{G} \to \mathfrak{S}_4$. Montrer que φ est injectif, puis bijectif (on rappelle que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions).

b) Montrer que φ induit un isomorphisme de $\mathrm{G} \cap \mathbf{SO}(3)$ sur $\mathfrak{A}_4$.

2) Soient C un cube, G le groupe des isométries de l'espace préservant C. Comme ci-dessus il s'identifie à un sous-groupe de $\mathbf{O}(3)$.

a) En considérant l'action de G sur les diagonales du cube, définir un homomorphisme $\varphi : \mathrm{G} \to \mathfrak{S}_4$. Montrer que φ est surjectif, de noyau $\{\pm 1\}$.

b) On pose $\mathrm{G}^+ = \mathrm{G} \cap \mathbf{SO}(3)$. Montrer que φ induit un isomorphisme de G^+ sur $\mathfrak{S}_4$, et que G est isomorphe au produit $\mathrm{G}^+ \times \{\pm 1\}$.

3) Soit X un ensemble fini, G un groupe fini opérant sur X.

a) Pour tout $g \in \mathrm{G}$, on note $f(g)$ le nombre de points de X fixés par g. Démontrer l'égalité [1]

$$\sum_{g \in \mathrm{G}} f(g) = |\mathrm{G}| \cdot |\mathrm{X}/\mathrm{G}|$$

(compter de deux manières l'ensemble des couples $(g, x) \in \mathrm{G} \times \mathrm{X}$ tels que $gx = x$, en projetant sur G puis sur X.)

On suppose désormais que tout élément $g \neq 1$ de G fixe exactement deux points, et que tout point de X est fixé par un élément $g \neq 1$.

b) Montrer que G a 3 orbites dans X, sauf si $|\mathrm{X}| = 2$ et G opère trivialement sur X (appliquer *a*) en observant que l'hypothèse entraîne $|\mathrm{X}| < 2|\mathrm{G}|$).

c) On suppose désormais que G a 3 orbites $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, \mathrm{O}_3$. On choisit un point de O_i et on note H_i son stabilisateur et p_i l'ordre de H_i. On numérote les orbites de façon que $p_1 \leq p_2 \leq p_3$. Démontrer la formule

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1 + \frac{2}{|\mathrm{G}|} \, .$$

En déduire que le quadruplet $(p_1, p_2, p_3; |\mathrm{G}|)$ est l'un des suivants:

$$(2, 2, r; 2r) \ \text{ avec } r \geq 2 \quad ; \quad (2, 3, 3; 12) \quad ; \quad (2, 3, 4; 24) \quad ; \quad (2, 3, 5; 60) \, .$$

[1] On note $|\mathrm{E}|$ le cardinal d'un ensemble fini E.

4) Soit G un sous-groupe fini du groupe $\mathbf{SO}(3)$. On le fait agir sur la sphère $\mathbf{S}^2$ (ensemble des vecteurs de longueur 1).

a) Montrer que chaque élément $\neq 1$ de G a exactement deux points fixes. Soit X l'ensemble de ces points fixes. Montrer que X est stable par G , et que l'action de G sur X vérifie les conditions de l'exercice précédent, dont on reprend les notations.

b) Si $|\mathrm{X}| = 2$, montrer que G est un groupe cyclique, formé des rotations d'angle $2k\pi/n$ autour d'un axe fixe.

c) On se place dans le cas $(2, 2, r; 2r)$ de l'exerc. 3 *c*) . Montrer que H_3 est un groupe cyclique de rotations autour d'un axe D , et qu'il est distingué dans G . Montrer que D est stable par tout élément de G . En déduire que G est un groupe diédral.

d) On se place dans le cas $(2, 3, 3; 12)$. Soit T l'enveloppe convexe de O_2 . Montrer que H_2 opère sur O_2 avec deux orbites, d'ordre 1 et 3. En déduire que T a toutes ses arêtes de même longueur, donc est un tétraèdre régulier, et que G est le groupe des isométries directes de T , isomorphe à $\mathfrak{A}_4$ (exerc. 1).

e) On se place dans le cas $(2, 3, 4; 24)$. Montrer successivement que:

α) H_3 est le groupe des rotations d'angle $k\pi/2$ autour d'un axe D ;

β) H_3 a deux orbites C_1 et C_2 d'ordre 4 dans O_2 , qui forment chacune un carré dans un plan orthogonal à D ; ces deux carrés sont échangés par $-\mathrm{I}$;

γ) Si x et y sont deux sommets opposés de C_1 , la translation de vecteur $x + y$ applique C_2 sur C_1 .

En déduire que l'enveloppe convexe de O_3 est un cube, et que G est le groupe des isométries directes de ce cube.