

TD Probabilités : Exercices “de base”

Exercice 1 :

a. On considère une famille de 3 enfants; on suppose que la probabilité d’avoir un garçon est égale à la probabilité d’avoir une fille. On considère les événements A=“il y a au plus une fille” et “M=“il y a au moins un enfant de chaque sexe”. Les événements A et M sont-ils indépendants ? Même question pour une famille de 4 enfants (Feller T1, p115).

b. Donner un exemple de 3 événements aléatoires indépendants 2 à 2, mais pas indépendants dans leur ensemble.

Exercice 2 : (Ouvrard)

Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$, et Y la v.a. définie pour $p > 0$ par

$$Y = -\frac{1}{p} \ln(X) .$$

Déterminer la loi de X .

Exercice 3 : (Ouvrard)

Soit $X = (X_1, X_2)$ une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^2 , de loi normale, ie de densité f

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) .$$

Soit g l’application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$g(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} \text{ si } x_2 \neq 0 ; g(x_1, 0) = 0 .$$

On note Y la variable aléatoire $Y = g(X)$. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

Exercice 4: Le principe de réflexion (Feller T1, pp 66-72).

On joue à pile ou face; on note $X_i = 1$ si on obtient pile au i ème lancer, et $X_i = -1$ si on obtient face. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$, et $S_0 = 0$.

a. Quel est le nombre de chemins $N_{n,x}$ tels que $S_n = x$?

b. Pour $x > 0$, montrer que le nombre de chemins tels que “ $S_1 = 1, S_n = x$ ”

et $\exists k \in \{2, \dots, n\}$ tel que $S_k = 0$ est égal au nombre de chemins tels que " $S_1 = -1, S_n = x$ " (principe de réflexion).

c. En déduire, pour $x > 0$, la probabilité

$$P(S_k > 0 \forall k \in \{1, \dots, n\} | S_n = x) .$$

Exercice 5: (Une application du lemme 2 de Borel-Cantelli)

On cherche à montrer qu'il n'existe pas de probabilité sur \mathbb{N} telle que pour tout k $P(A_k) = 1/k$, où $A_k = k\mathbb{N}$.

a. Montrer que deux événements A_p et A_q sont indépendants si et seulement si p et q sont premiers entre eux.

b. On définit l'événement

$$B = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ appartient à une infinité de } A_p \text{ avec } p \text{ premier}\} .$$

Montrer que B est de probabilité 1; conclure.

P. S : Donner un contre exemple au lemme 2 de Borel-Cantelli, lorsque les événements ne sont pas indépendants (sans rapport avec ce qui précède).

Exercice 7 : Le paradoxe de l'inspection.

Une usine possède une machine, qui tombe souvent en panne. Le directeur prétend que la durée moyenne entre deux pannes de la machine est T . Un inspecteur se rend dans l'usine N fois; à chaque fois, il se renseigne sur l'instant t_k de la dernière panne de la machine, et attend l'instant t'_k de la panne suivante. Il évalue ensuite la durée moyenne entre deux pannes par la formule :

$$\hat{T} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (t'_k - t_k) .$$

Que pensez-vous de sa méthode ? On pourra supposer que les durées entre deux pannes consécutives sont des v.a.i.i.d.