TD Calculs d'espérances

Exercice 1 : La ruine du joueur (Feller T1, p313)
On considère un joueur qui à chaque partie gagne ou perd un euro avec probabilités respectivement p et $q = 1 - p$. Son capital initial est z, et i joue contre un adversaire dont le capital initial est $a - z$. Le capital total est donc a. Le joueur joue jusqu'à sa ruine (son capital tombe à 0) ou à celle de son adversaire (le capital du joueur est alors a). On note q_z la probabilité que le jeu s'arrête par la ruine du joueur, et p_z la probabilité que le jeu s'arrête par sa victoire.
a. Montrer que $q_z = pq_{z+1} + qq_{z-1}$ pour $1 \leq z \leq a - 1$.
b. Calculer p_z et p_z.
c. Comment changent p_z et q_z si l'enjeu de chaque partie est doublé (2 euros) ?
d. On considère maintenant la variable aléatoire T_z, durée du jeu. On suppose que T_z a une espérance finie D_z. Calculer D_z.

Exercice 2 : (adapté de l'épreuve agreg. externe analyse 2007)
On note Ω l'ensemble des n-uplets $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, avec $\omega_k \in \{-1, 1\}$ pour tout k. On munit Ω de la probabilité uniforme P. On note X_k la v.a. définie sur Ω par $X_k(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \omega_k$. On fixe λ un réel positif ou nul. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On pose $Z = \sum_{k=1}^n a_k X_k$.
a. Montrer que pour tout x réel

$$\cosh x \leq e^{x^2/2} .$$

Indication : utiliser les séries entières.
b. Calculer $E\left(e^{\lambda Re(Z)}\right)$.
c. Montrer que

$$E\left(e^{\lambda |Re(Z)|}\right) \leq 2 \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=1}^n (Re\ a_k)^2\right) .$$

d. Montrer que

$$E\left(e^{\lambda |Z|}\right) \leq 2 \exp\left(\lambda^2 \sum_{k=1}^n |a_k|^2\right) .$$

Exercice 3 :
Soient $X_1, \ldots, X_n$ n v.a.i.i.d. gaussiennes à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, d'espérance $\vec{0}$

et de matrice d'autocovariance diagonale $\sigma^2 I_3$. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. En considérant des projections de S_n, calculer $E(||S_n||^2)$.

Exercice 4 : (v.a. gaussiennes, moindres carrés)
Soit Y une v.a. gausienne à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, d'espérance $\vec{m}$ et de matrice de variances-covariances $\sigma^2 I_n$.
a. Soit V un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p. On note Z la v.a. obtenue par projection orthogonale de Y sur V. Quelle est l'espérance de Z ? Sa matrice de variances-covariances ? Calculer, en fonction de $\vec{m}$, σ^2 et p l'espérance de $||Z||^2$.
b. On répète n fois une expérience, pour n valeurs $x_1, \ldots, x_n$ d'un paramètre x. Pour chaque valeur de x, on connaît le résultat de la mesure y_i, et on suppose qu'il est donné par la relation

$$y_i = a x_i + \varepsilon_i \ ,$$

où les ε_i sont des v.a.i.i.d. gaussiennes centrées réduites. Calculer $\hat{a}$, *l'estimateur* de a par la méthode des moindres carrés. Montrer en particulier que $\hat{a}\vec{x}$ est la projection orthogonale de $\vec{y}$ sur la droite engendrée par $\vec{x}$. Calculer le risque quadratique r de l'estimateur $\hat{a}$, définie par

$$r = E[(\hat{a} - a)^2] \ .$$

c. Le résultat de l'expérience dépend maintenant de p paramètres :

$$y_i = \sum_{k=1}^{p} a_k x_i^{(k)} + \varepsilon_i \ ,$$

On note $\vec{y}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ formé par les y_i, $\vec{x}^{(k)}$ les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ formés par les $x_i^{(k)}$, V le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les $\vec{x}^{(k)}$, et Π_V la projection orthogonale sur V. Montrer que les $\hat{a}_k$, estimateurs des a_k par la méthode des moindres carrés vérifient la relation

$$\Pi_V.\vec{y} = \sum_k \hat{a}_k \vec{x}^{(k)} \ .$$

A quelle condition les $\hat{a}_k$ sont-ils uniquement déterminés ? Lorsque les $\vec{x}^{(k)}$ forment une base orthonormée de V, calculer le risque quadratique

$$r = \sum_{k=1}^{p} E[(\hat{a}_k - a_k)^2] \ .$$