Travaux dirigés : nombres et extensions algébriques

Rappel : le degré d'une extension de corps $K \subset L$ est la dimension du K-espace vectoriel L.
Notation : Si $K \subset L$ est une extension de corps et $x_1, \ldots, x_n \in L$, on désigne par $K(x_1, \ldots, x_n)$ le plus petit corps sous-corps de L contenant $x_1, \ldots, x_n$. Sauf dans l'exercice 2, toutes les extensions de $\mathbb{Q}$ sont prises dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est de degré 2 sur $\mathbb{Q}$. Montrer qu'il n'existe pas de corps intermédiaire entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

2. Soit $K \subset L$ une extension de degré 2 (une telle extension est dite *quadratique*).

a) Montrer que pour tout $x \in L \setminus K$, on a $L = K(x)$ et L est un corps de décomposition du polynôme minimal de x.

b) Montrer qu'il existe $x \in L \setminus K$ tel que $x^2 \in K$ et $L = K(x)$.

c) Montrer que le groupe G des automorphismes de corps de L laissant stable K est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que le polynôme minimal de $x \in L \setminus K$ a pour racines x et son image par l'élément non trivial de G.

3. Montrer que le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ est de degré 4 sur $\mathbb{Q}$ et est égal à $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Quel est le polynôme minimal de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$? Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ en est un corps de décomposition. Calculer tous les corps intermédiaires entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ (on utilisera 2.b).

4. Soit $P = X^4 - 2X^2 - 1$ et $L = \mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt{2}+1})$.

a) Montrer que P est irréductible $\mathbb{Q}[X]$. En déduire le degré de L sur $\mathbb{Q}$.

b) Montrer qu'il existe une extension intermédiaire K entre $\mathbb{Q}$ et L.

c) L est-il un corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$? Quel est le degré de ce dernier[1] ?

5. (cf. [C, p. 39]) Soit $S = X^3 + 4X - 1$ et $P = X^4 - X - 1$.

a) Montrer que le polynôme S n'a pas de racine rationnelle ; en déduire qu'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer qu'il a une unique racine réelle α, qui est positive et vérifie $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$.

b) Montrer que le polynôme P admet exactement deux racines réelles ; en déduire qu'il est produit d'un polynôme scindé $Q = (X-\beta)(X-\gamma)$ avec un polynôme irréductible R dans $\mathbb{R}[X]$.

c) Montrer que $Q(X) = X^2 + aX + b$, avec $a^2 = \alpha$. Calculer le degré de $\mathbb{Q}(\beta)$.

d) Montrer que $\mathbb{Q}$ est le seul sous-corps de $\mathbb{Q}(\beta)$ (raisonner par l'absurde et appliquer 2.a à $x = \beta$).

e) $\mathbb{Q}(\beta)$ est-il un corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$? Montrer que 3 divise le degré sur $\mathbb{Q}$ de ce dernier[2].

6. Montrer que le sous-corps $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$ de $\mathbb{C}$ est de degré 6. Déterminer un élément x vérifiant $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j) = \mathbb{Q}(x)$ ainsi que son polynôme minimal.

7. Reprendre la dernière question de l'exercice 3 en utilisant la correspondance de Galois (cf. [F, 4.10.3]). Déterminer aussi tous les corps intermédiaires entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$ ([F, 4.10.4]).

Références :

[C] Carrega, Théorie des corps, la règle et le compas, Hermann.
[F] Francinou et Gianella, Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1, Masson.

[1] Cet exercice fournit un exemple d'extension constructible non normale, cf. [C, p. 235, th. 3].
[2] Cet exercice fournit un exemple d'extension non constructible de degré 4, cf. [C, p. 39].